

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗОН ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВЗВЕСЬЮ В МОРСКОЙ СРЕДЕ

**Е.В. Амосова, Д.С. Кикелин**

Представлена трехмерная нестационарная математическая модель, описывающая диффузию и дрейф массы взвеси в жидкости под действием течения и ветровых нагрузок. На основе конечно-разностного анализа проведено численное моделирование динамики участка моря. Численная модель используется для получения гидродинамических данных на открытых участках акватории моря, с помощью которых рассчитываются динамика перемещений и концентрация взвешенных веществ при проведении гидрологических работ в прибрежной морской акватории.

**Ключевые слова:** конечно-элементное моделирование, гидродинамическое моделирование, уравнения мелкой воды.

## Введение

Изучение гидродинамических и потоковых процессов, происходящих на акватории проектирования, имеет большое прикладное значение для решения конкретных инженерных и проектно-изыскательских задач: сезонного проектирования судоходных трасс, проектирования береговых сооружений, водозаборных станций, дамб, запруд и берегоукрепительных сооружений, для прогнозирования возможных последствий негативного воздействия указанной деятельности на состояние водных биоресурсов. Главным фактором негативного воздействия на водную среду при производстве дноуглубительных работ является загрязнение воды вследствие выхода во взвесь тонкодисперсных фракций разрабатываемого грунта [1, 2]. В связи с необходимостью проведения оценок влияния антропогенных воздействий при дноуглубительных работах, дампинге грунта, сбросах сточных вод, при прокладке подводных трубопроводов важно найти границы зон осаждения взвеси загрязняющих веществ, площадей дна с определенной толщиной выпавшего слоя грунта, объемов воды с заданными уровнями концентрации загрязняющих веществ.

Математическое моделирование распространения шлейфов мутности на акватории позволит производить расчеты двухмерной и трехмерной гидравлики водных объектов и деформаций их ложа, дисперсии консервативных и неконсервативных примесей.

На сегодняшний день не существует единой модели, которая подходила бы для всех вариантов перемещений загрязняющей массы в различных акваториях. Связано это с особенностями рассматриваемого региона, геометрией самого загрязнения, а также с различной степенью влияния факторов на распространение загрязнения. Поэтому ученые во всем мире предлагают различные методы моделирования движения загрязняющих веществ в жидкости.

В работах [3–5] рассмотрены модели растекания и переноса нефтяного пятна в прибрежных водах. Модель учитывает диффузию и дрейф пятна под действием течения и ветровых нагрузок. На текущий момент существуют работы, в которых процесс турбулентного рассеивания взвеси осуществляется с помощью стохастических дифференциальных уравнений. Например, в работе [6] предлагают подход для решения задач, связанных с прогнозированием распространения нефтяных пятен в районе северо-востока Сахалина. В работе [7] предложен собственный решатель на основе метода Галеркина для решения усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. Пример моделирования спирально-вихревых течений с использованием двухмерных нестационарных баротропных уравнений Эйлера представлен в работе [8]. Авторы проводили расчет на основе квазигазодинамической регуляризации уравнений Эйлера в системе полярных координат.

В настоящей работе математическая модель строится в предположении гидродинамического приближения [9–13] на основе уравнений течений неоднородной жидкости при наличии пространственно-распределенных источников и учитывает турбулентный характер движения водного потока, нелинейный закон гидравлического сопротивления естественных потоков, описывает процесс русловых деформаций. Предложенная модель учитывает влияние источников на динамику водной среды, а также изменение воздействия источника по всей длине в уравнении свободной поверхности.

Систему уравнений для моделирования распространения зон загрязнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{q}{\rho_0} = \\ & = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^{\xi} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz' + v \Delta u + v(2\omega \sin \varphi), \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{q}{\rho_0} = \\ & = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^{\xi} \frac{\partial \rho}{\partial y} dz' + v \Delta v - u(2\omega \sin \varphi), \\ & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{q}{\rho_0}, \\ & \frac{\partial}{\partial t}(\rho H) + \nabla(\rho H) \bar{u} + \rho H \operatorname{div} \bar{u} = \frac{q}{\rho_0} H, \\ & H = \xi + h, \\ & \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu) + \frac{\partial}{\partial y}(cv) + \frac{\partial}{\partial z}(c(w - w_0)) = \\ & = \frac{q}{\rho_0} c_s - \lambda c + v \Delta c, \end{aligned}$$

где  $\bar{v} = \{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), z(x, y, z, t)\}$  – компоненты вектора скорости течения;  $\xi(x, y, t)$  – функция свободной поверхности;  $h(x, y)$  – функция поверхности дна;  $H(x, y, t)$  – расстояние от свободной поверхности до поверхности дна;  $\rho_0$  – среднее значение плотности воды;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $q$  – плотность источников;  $v$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли;  $\varphi$  – географическая широта;  $c$  – концентрация растворенных или взвешенных примесей;  $w_0$  – скорость осаждения взвешенных примесей (гидравлическая крупность);  $\lambda$  – коэффициент консервативности;  $c_s$  – концентрация примеси.

К системе добавляются краевые условия, которые учитывают трение о поверхность дна, ветровые касательные напряжения трения, трение на боковых границах, смежных с океаном. Также задается начальное условие для вектора скорости на входящей границе.

Поставленная задача решается методом конечных элементов с дискретизацией всех уравнений по времени. Для моделирования конвективной производной, входящей в уравнения данной системы, используется метод характеристик, с помощью которого строится функция, описывающая конвективный перенос частиц как с границы области, так и в начальный момент времени. Для линеаризации нелинейных слагаемых в граничных условиях применяется метод линеаризации Ньютона. Будем исследовать линеаризованную модель, которая характеризуется тем, что на новом временном слое решение находится из линейной вариационной задачи.

*Результаты вычислительного эксперимента.* Расчет системы проводился в программном комплексе FreeFem++ [14] методом конечных элементов на двух моделях прибрежной зоны. Результатами вычислений являются графики скоростей и концентрации взвесей в слоях водной среды.

Рассматривается произвольная трехмерная область с общей площадью водной поверхности, не превосходящей величины  $S = 9600000 \text{ м}^2$ . Для построения поля глубин в модели принята линейная функция, принимающая максимальное значение 30 м и минимальное 0.6 м<sup>2</sup>, общее время наблюдения динамики шлейфа мутности 3 ч.

Сетка по всему объёму содержит 25776 конечных элементов. Наибольший объёмный размер одного конечного элемента составляет 60 м × 60 м × 3 м, шаг по времени соответствует 2.8 мин.

Мощность источника загрязнения водной среды при производстве гидротехнических работ определена формулой  $q = 5358 \text{ г/с}$ , плотность частиц грунта  $\rho = 2.7 \text{ т/м}^3$ , площадь поверхности источника загрязнения равна  $S_0 = 162500 \text{ м}^2$ . Концентрация примеси в начальный момент времени составила  $c = 100 \text{ мг/л}$ .

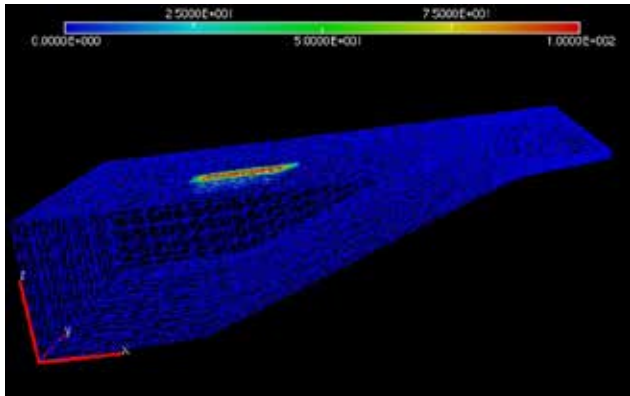
Основными причинами, определяющими скоростную структуру водного потока в районе гидрологических работ, являются дрейф водных масс под действием ветра и приливно-отливные колебания уровня воды. При выборе гидрометеорологического сценария учитывалось, что гидрологические работы будут проводиться при силе ветра над уровнем моря 10 м, равной  $W = 5.4 \text{ м/с}$ , и во время приливного цикла.

В работе представлено два тестовых расчёта для разных гидродинамических условий. В первом тесте проведены расчёты распространения взвеси на прямоугольной геометрии при прямолинейном движении жидкости.

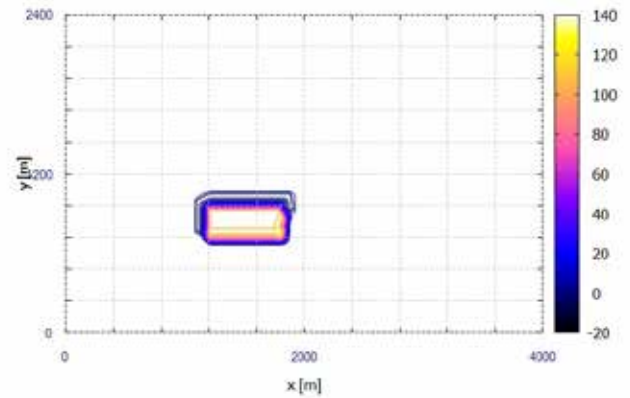
На рис. 1–5 изображены графики распространения взвеси на прямоугольной геометрии при прямолинейном движении жидкости в течение всего времени.

Как видно из графиков, представленных на рис 2–5, облако взвешенных частиц перемещается по на-

правлению потока воды. Заметим, что концентрация взвеси немного сместилась к правой границе, это обусловлено ветровым трением о поверхность воды. При этом концентрация примеси с течением времени, уменьшается.

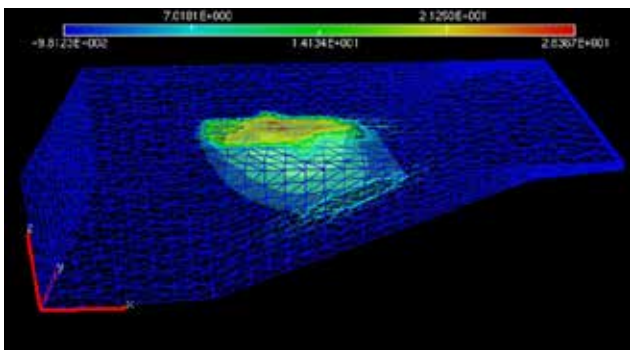


а

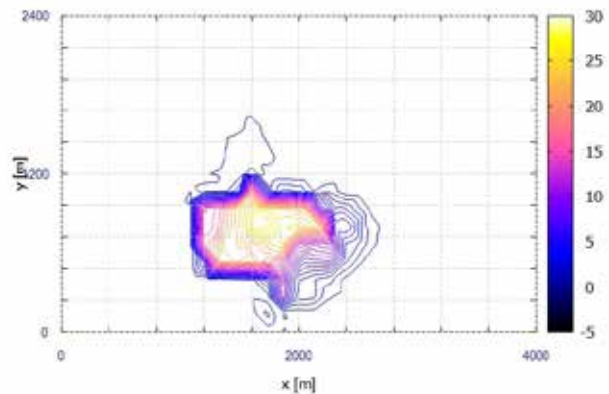


б

Рис. 1. Расположение источника загрязнения в области, в момент времени  $t = 0$ : а – трехмерное изображение, б – изолинии источника на плоскости

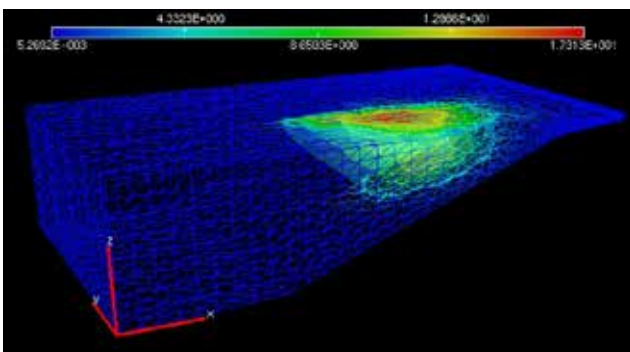


а

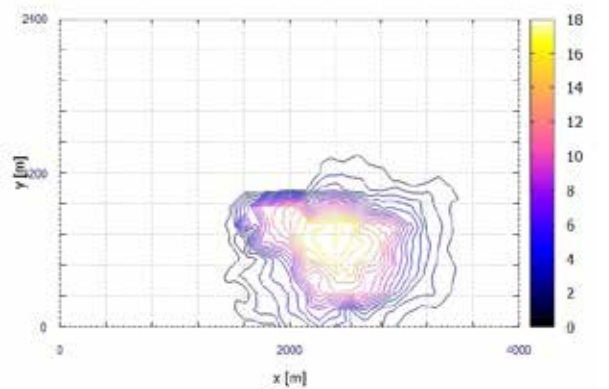


б

Рис. 2. Шлейф дополнительной мутности, образующийся в области при выполнении гидрологических работ во время прилива: а – трёхмерная область; б – изолинии на поверхности  $z = 0$ . Время  $t = 42$  мин от начала работ

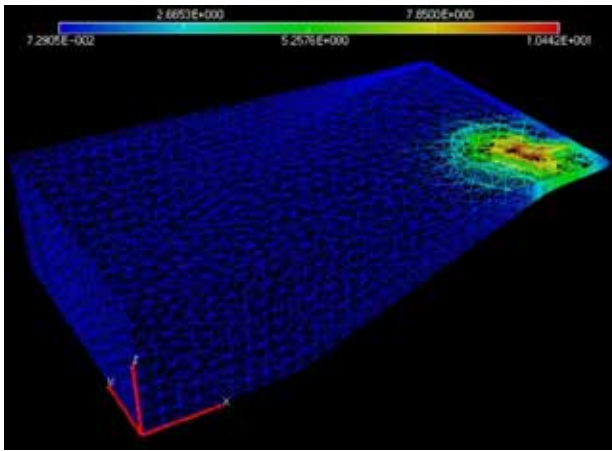


а

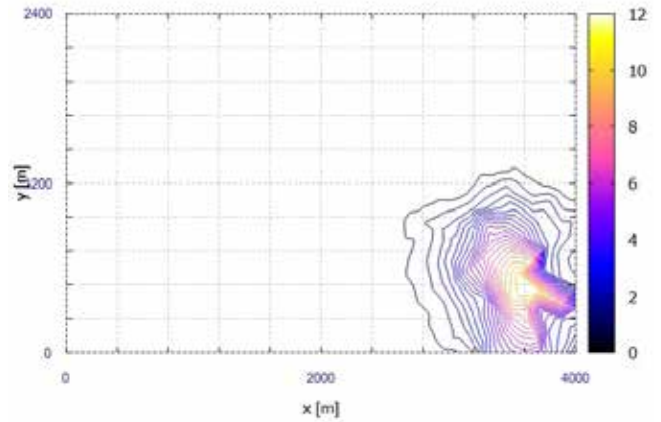


б

Рис.3. Шлейф дополнительной мутности, образующийся в области при выполнении гидрологических работ во время прилива: а – трёхмерная область; б – изолинии на поверхности  $z = 0$ . Время  $t = 84$  мин от начала работ

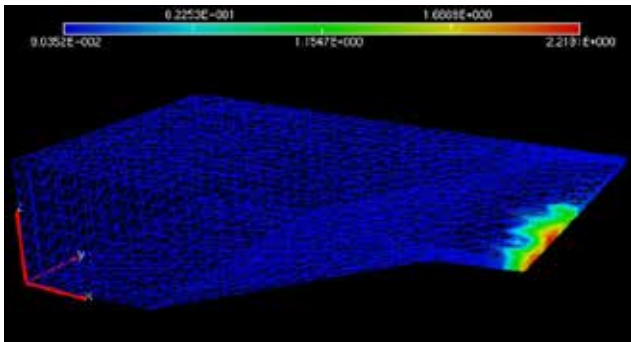


a

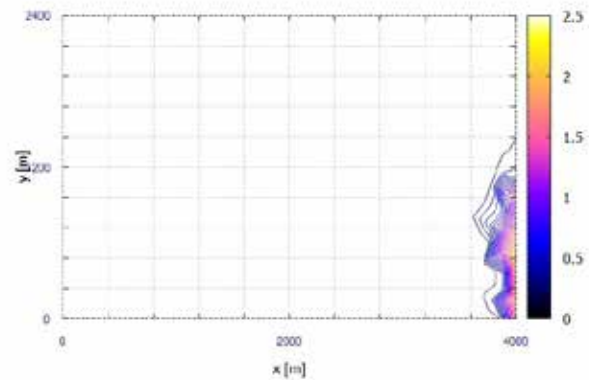


b

Рис. 4. Шлейф дополнительной мутности, образующийся в области при выполнении гидрологических работ во время прилива: а – трёхмерная область; б – изолинии на поверхности  $z = 0$ . Время  $t = 125$  мин от начала работ



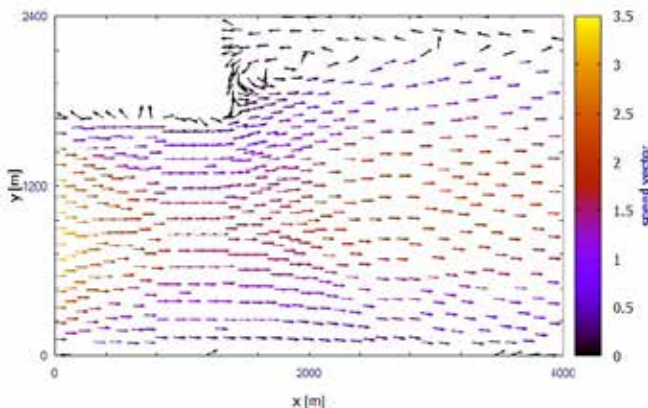
a



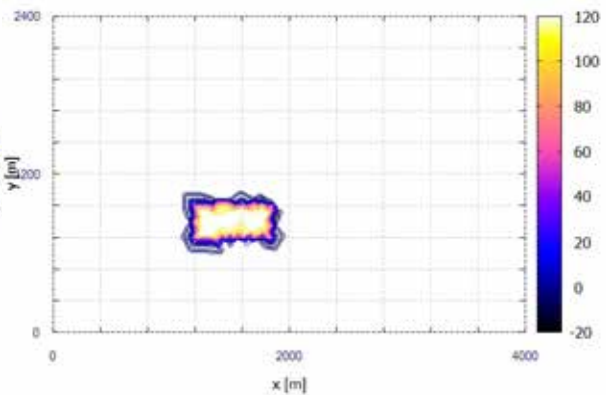
b

Рис. 5. Шлейф дополнительной мутности, образующийся в области при выполнении гидрологических работ во время прилива: а – трёхмерная область; б – изолинии на поверхности  $z = 0$ . Время  $t = 167$  мин от начала работ

Рассмотрим распространение взвеси на геометрии с расширяющимся каналом. На рис. 6, а представлен результат расчёта течения в канале с резким увеличением ширины. Видно, что образуется вихревой поток в расширенной области. Полученные гидродинамические показатели использовались при моделировании переноса взвешенных частиц. На рис. 6, б указано начальное положение источника.



a



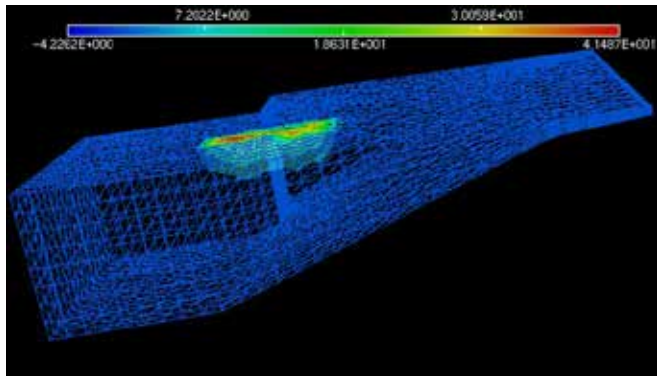
b

Рис. 6. Распространение взвеси на геометрии с расширяющимся каналом: а – иллюстрация к расчётам поля скорости течения; б – начальное положение источника

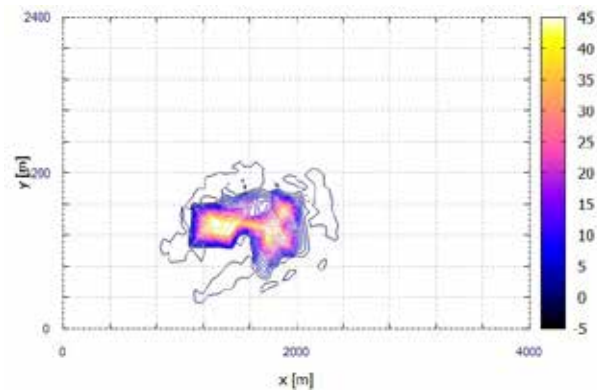
На основе моделирования гидродинамической модели, в области с расширяющимся каналом, проведен численный расчет распространения взвешенных частиц под воздействием местных течений. На рис. 7–10 представлена трехмерная и плоская визуализация

процесса изменения шлейфа мутности с течением времени.

Рассмотрим средние по площади и по объёму характеристики взвеси. Среднее значение концентрации взвешенных частиц по площади  $C_s(t)$  и среднее

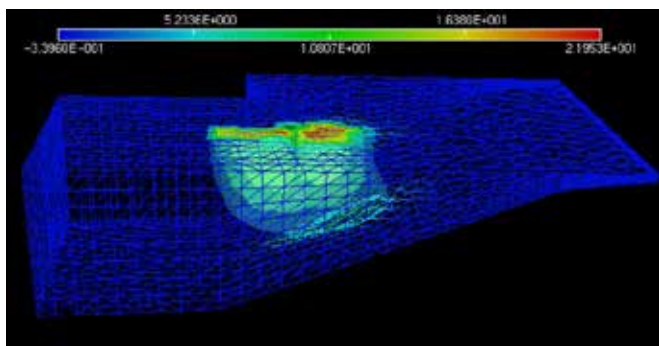


a

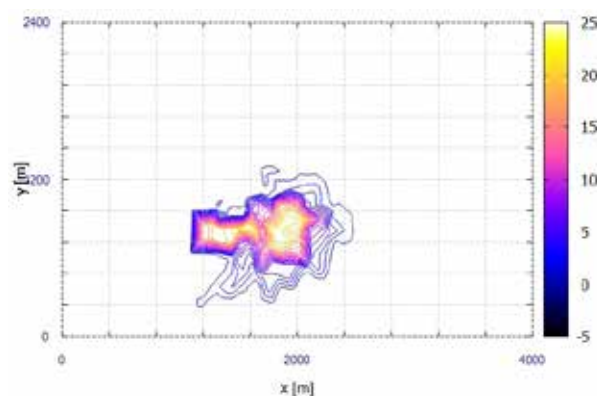


b

Рис. 7. Шлейф дополнительной мутности, образующийся в области с расширяющимся каналом при выполнении гидрологических работ во время прилива: а – трёхмерная область; б – изолинии на поверхности  $z = 0$ . Время  $t = 6$  мин от начала работ

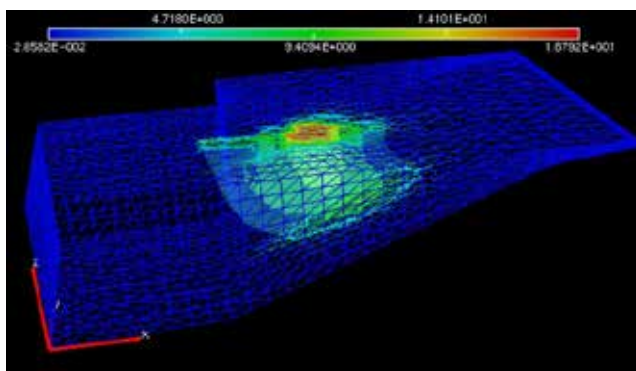


a

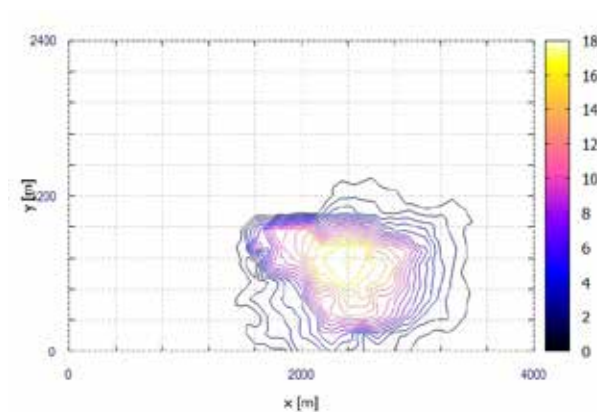


b

Рис. 8. Шлейф дополнительной мутности, образующийся в области с расширяющимся каналом при выполнении гидрологических работ во время прилива: а – трёхмерная область; б – изолинии на поверхности  $z = 0$ . Время  $t = 42$  мин от начала работ

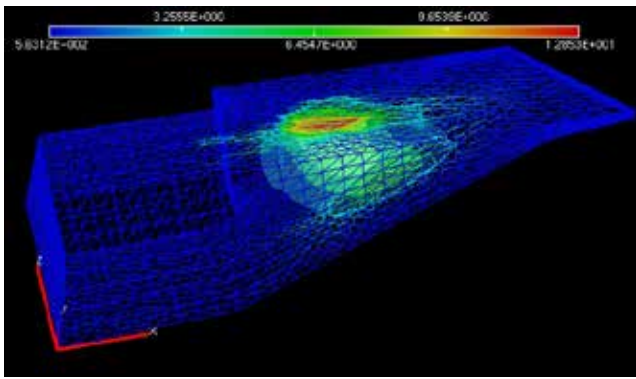


a

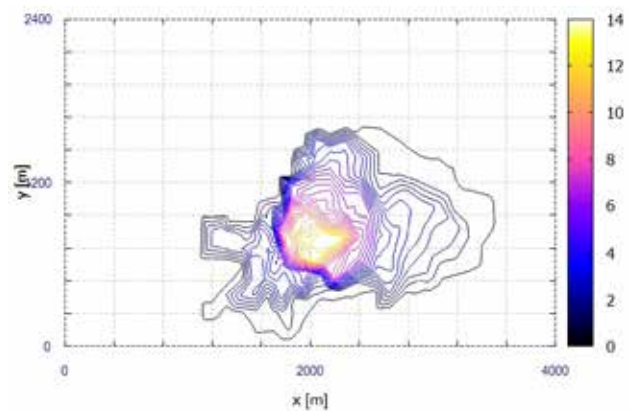


b

Рис. 9. Шлейф дополнительной мутности, образующийся в области с расширяющимся каналом при выполнении гидрологических работ во время прилива: а – трёхмерная область; б – изолинии на поверхности  $z = 0$ . Время  $t = 84$  мин от начала работ



a



b

Рис. 10. Шлейф дополнительной мутности, образующийся в области с расширяющимся каналом при выполнении гидрологических работ во время прилива: а – трёхмерная область; б – изолинии на поверхности  $z = 0$ . Время  $t = 167$  мин от начала работ

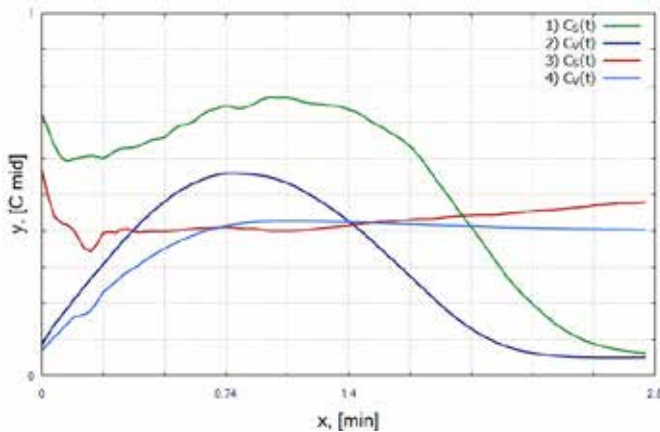


Рис. 11. Средние значения концентраций примеси на всём промежутке времени, линия 1 – среднее значение концентрации по площади для первого теста; линия 2 – среднее значение концентрации по объёму для первого теста; линия 3 – среднее значение концентрации по площади для второго теста; линия 4 – среднее значение концентрации по объёму для второго теста

по объёму  $C_V(t)$  определим по формулам:

$$C_S(t) = \int_S c(x, y, 0, t) dx dy / \int_S dx dy,$$

$$C_V(t) = \int_V c(x, y, z, t) dx dy dz / \int_V dx dy dz.$$

Как видно из рис. 11, диффузионные изменения концентрации взвешенных частиц в облаке зависят от гидродинамического сценария. Облака взвеси движутся сквозь водную толщу под воздействием местных течений и, возможно, осаждаются на дно. В процессе движения они могут увеличиваться в размере за счёт горизонтальной турбулентной диффузии, а концентрации взвешенных веществ в них падают. Для случая с резко расширяющимся каналом, начиная с момента времени  $t_* = 0.74$ , средние характеристики изменяются очень медленно (линии

3, 4 на рис.11), при этом среднее значение концентрации по площади (линия 3, рис. 11) возрастает, тогда как для случая прямоугольной области, средние значения резко уменьшаются (линии 1, 2 на рис.11). Уменьшение массы облака связано с последовательным осаждением на дно различных фракций взвеси. В дальнейшем планируется рассмотреть вопросы транспорта взвешенных частиц.

### Заключение

В работе представлен результат численного моделирования распространения взвешенных частиц в акватории моря при утилизации грунта, изъятых при проведении дноуглубительных работ. Исходные данные для расчётов соответствуют характеристикам утилизируемых донных отложений, гидрометеорологические условия не привязаны к местности. Целью работы является демонстрация на тестовом примере работоспособности предложенной методики переноса взвеси. Основу исследования составляет трёхмерная модель осреднённых по времени уравнений Навье–Стокса в условиях приближения гидростатики, позволяющая строить визуализированные сценарии перемещений водных слоёв дополнительной мутности.

Важным фактором негативного воздействия на водную среду при производстве дноуглубительных работ является загрязнение воды вследствие выхода во взвесь тонкодисперсных фракций разрабатываемого грунта. В результате строительных работ происходит замутнение воды и, следовательно, ослабление процессов нормального развития бактериопланктона, фитопланктона, зоопланктона и, частично, в тяжёлых случаях – зообентоса. Численное моделирование процессов перемещений шлейфов мутности

позволит не только оценить ущерб, нанесенный ихтиофауне в процессе производства гидрологических работ в морской акватории, но и спрогнозировать оптимальный режим требуемых работ с учетом ветровых погодных условий, сезонных приливов и отливов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачев С. А. Вопросы оценки ущерба водным биоресурсам // Труды Кольского научного центра РАН. 2012. № 4. С. 46–62.
2. Сорокина Ю. В. К вопросу об эколого-правовой эффективности охраны водных биологических ресурсов // Право. Законодательство. Личность. 2016. № 1. С. 195–200.
3. Daming Li, Xingchen Tang, Yanqing Li, Xiao Wang, Hongqiang Zhang. Mathematical Modeling of Marine Oil Spills in the Luanjiakou District, near the Port of Yantai // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2018.
4. Pinho J. L. S., Antunes do Carmo J. S., Vieira J. M. P., Mathematical modelling of oil spills in the Atlantic Iberian coastal waters // Coastal Environment V incorporating Oil Spill Studies. WIT Press, 2004. P. 337–347.
5. Psaltaki M., Markatos N. C. Modelling the behaviour of an oil spill in the marine environment // IASME Transactions. 2005. V. 2, N. 9. P. 1656–1664.
6. Богдановский А.А., Кочергин И.Е. Параметризация характеристик перемешивания для типичных условий северо-восточного шельфа Сахалина // Гидрометеорологические процессы на шельфе: оценка воздействия на окружающую среду. Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 89–102
7. Tiberge M., Hennink A., Kloosterman J.L., Lathouwers D. A high-order discontinuous Galerkin solver for the incompressible RANS equations coupled to the  $k-\epsilon$  turbulence model // Comput. & Fluids 212. 2020.
8. Истомина М.А., Золотник А.А., Елизарова Т.Г. Гидродинамические аспекты формирования спирально-вихревых структур во вращающихся газовых дисках // Астрономический журнал. 2018. Т. 95, № 1. С. 9–18.
9. Бухтеев В. Г., Доронин Ю. П., Зубова М. М. и др. Динамика океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 304 с.
10. Клеванный К.А., Смирнова Е.В. Использование программного комплекса CARDINAL // Журнал университета водных коммуникаций. 2009, № 1. С. 152–160.
11. Котеров В. Н., Юрезанская Ю. С. Моделирование переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе. Эффективная гидравлическая крупность полидисперсной взвеси // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 7. С. 1306–1319.
12. Budinski L. Solute transport in shallow water flows using the coupled curvilinear Lattice Boltzmann method // Journal of Hydrology. 573. 10.1016/j.jhydro.2019.03.094.
13. Cea L., Vazquez-Cendon M. E. Unstructured finite volume discretization of bed friction and convective flux in solute transport models linked to the shallow water equations // Journal of Computational Physics. 2012. N. 231. P. 3317–3339.
14. Hecht F., Pironneau O., Le Hyaric A., Ohtsuka K. FreeFem++. Version 2.17-1.

#### Для цитирования:

Амосова Е.В., Кикелин Д.С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗОН ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВЗВЕСЬЮ В МОРСКОЙ СРЕДЕ // Подводные исследования и робототехника. 2021. №. 4(38). С. 72–79. DOI: 10.37102/1992-4429\_2021\_38\_04\_07.

#### Сведения об авторах

**АМОСОВА Елена Владимировна**, к. ф.-м. н., научный сотрудник

Институт прикладной математики ДВО РАН.

Адрес: 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

Дальневосточный федеральный университет.

Адрес: 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.

**Область научных интересов:** дифференциальные уравнения, механика жидкости и газов, вычислительная гидродинамика.

**E-mail:** leb@iam.dvo.ru

**Тел.:** 89502893015

**ORCID ID:** 0000-0003-2154-5010

**КИКЕЛИН Данил Сергеевич**, магистр

Дальневосточный федеральный университет.

Адрес: 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.

**Область научных интересов:** вычислительная гидродинамика.

**E-mail:** kikelin.ds@students.dvfu.ru

