

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОГО РАССЕЙЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ МОД НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ РЕЛЬЕФА ДНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ

М.С. Казак, П.С. Петров, К.В. Кошель

При моделировании распространения звука в мелком море с проницаемым дном, как правило, пренебрегают эффектом обратного рассеяния акустических волн. В частности, метод параболического уравнения имеет в своей основе именно приближение однонаправленного распространения. Тем не менее в литературе практически отсутствуют оценки амплитуды обратного рассеяния. В данной работе такие оценки получены с использованием модового представления поля в адиабатическом приближении. Данное приближение позволяет отделить обратное рассеяние от взаимодействия мод – другого важного эффекта, наблюдаемого при рассеянии акустических волн на неоднородностях батиметрии. Для случая падения нормальной волны на локализованную неоднородность дна исследована зависимость амплитуды волны, рассеянной в обратном направлении, от размеров неоднородности и номера моды. Для расчета коэффициента отражения используется численное решение уравнения Риккати, которое получается при переходе от краевой задачи для уравнения Гельмгольца для модовой амплитуды к соответствующим уравнениям погружения. Обсуждаются возможности дальнейшего использования модовых уравнений погружения при решении задач распространения звука в океане.

**Ключевые слова:** акустика океана; метод нормальных волн; метод инвариантного погружения; обратное рассеяние.

## Введение

В работе рассматривается задача о падении нормальной волны (акустической моды) на неоднородность рельефа дна в волноводе мелкого моря. Чтобы проиллюстрировать подход, в рамках которого подобную задачу можно решить в общем случае, здесь будет рассмотрен простейший случай адиабатического рассеяния, при котором можно пренебречь возбуждением других мод [1]. Условия применимости адиабатического приближения в задачах такого рода неоднократно обсуждались в литературе [1].

Для решения задачи будет использовано модовое представление акустического поля в двумерном случае, которое в адиабатическом приближении приводит к одномерным уравнениям Гельмгольца для модовых амплитуд [1], описывающим падение плоской волны на неоднородный слой. Такие уравнения могут быть сведены к уравнениям погружения

путем введения функции, описывающей зависимость коэффициента отражения от слоя от положения его правой границы [2,3]. Методика решения волновых задач с помощью уравнений погружения была развита в работах В.И. Кляцкина и его соавторов, причем основополагающая для данного подхода статья была опубликована ровно 40 лет назад [3].

Данным сообщением авторы намерены обозначить новое направление исследований, в котором метод погружения будет использоваться для системы связанных уравнений для модовых амплитуд как в двумерных, так и в трехмерных задачах акустики океана.

## 1. Постановка задачи и модовое представление поля

Рассматривается задача распространения звука в двумерном волноводе мелкого моря  $\Omega = \{(x, z) \mid z \geq 0\}$ ,

представленном на рис. 1. Волновод состоит из водного слоя  $0 \leq z \leq h(x)$ , отделенного от жидкого проницаемого дна поверхностью  $z = h(x)$ . Предполагается, что вне интервала  $x \in [L_0, L]$  море имеет постоянную глубину  $h = h_0$ . Таким образом, неоднородность рельефа дна в рассматриваемом волноводе локализована на этом интервале.

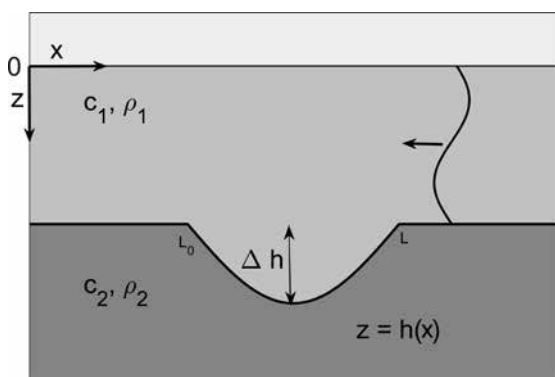


Рис. 1. Схематическое изображение волновода мелкого моря с нормальной волной, падающей на область неоднородности рельефа дна

Распространение звука в таком волноводе описывается двумерным уравнением Гельмгольца [1]:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P = 0, \quad (1)$$

где  $P(x, z)$  – акустическое давление,  $c$  – скорость звука,  $\omega$  – циклическая частота.

Предполагается, что справа на неоднородность рельефа дна падает нормальная волна (мода)  $\exp(-ik_{0,j}x)\varphi_{0,j}(z)$ , где  $\varphi_{0,j}$  есть собственная функция акустической спектральной задачи [1], а  $k_{0,j}$  – соответствующее горизонтальное волновое число [1].

Предполагается, что вариации глубины являются настолько малыми, что распространение звука можно считать адиабатическим [1, 4], т.е. решение во всем волноводе может быть представлено в виде  $P(x, z) = A_j(x)\varphi_j(x, z)$  (ввиду вариаций глубины моря волновые числа  $k_j(x)$  и собственные функции  $\varphi_j(x, z)$  акустических мод параметрически зависят от  $x$ ). Стоит отметить, что условия применимости такого приближения детально рассмотрены в классической работе [4]. В дальнейшем всегда будет иметься в виду одномодовое распространение и опускаться индекс  $j$  в предположении, что номер моды зафиксирован.

После подстановки анзаца  $P(x, z) = A(x)\phi(z)$  в уравнение (1) получается следующее уравнение для модовой амплитуды:

$$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} + k^2(1 + \varepsilon(x))A(x) = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon(x) = \frac{k^2(x)}{k_0^2} - 1$ .

Акустическое поле справа от неоднородности батиметрии (т.е. при  $x > L$ ) представляет собой суперпозицию падающей нормальной волны и волны, отраженной неоднородностью:

$$P^+(x, z) = \left( e^{-ik(x-L)} + R_L e^{ik(x-L)} \right) \phi(z),$$

где  $R_L$  есть коэффициент отражения моды, который удобно считать функцией  $L$ . Поле  $P^-(x, z)$  при  $x < L_0$  определяется коэффициентом прохождения моды через неоднородность  $T_L$ :  $P^-(x, z) = T_L e^{-ik(x-L)} \phi(z)$ .

Выражения для  $P^\pm(x, z)$  дают следующие краевые условия для уравнения (2) при  $x = L_0, x = L$ :

$$A(L) = 1 + R, \quad \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=L} = -ik[1 - R], \quad (3)$$

$$A(L_0) = T, \quad \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=L_0} = -ikT.$$

Если исключить  $R$  и  $T$  из (3), то можно переписать их в виде граничных условий третьего рода:

$$A(L) + \frac{i}{k} \frac{\partial A}{\partial x}(L) = 2, \quad A(L_0) - \frac{i}{k} \frac{\partial A}{\partial x}(L_0) = 0. \quad (4)$$

В данной работе объектом научного интереса является оценка коэффициента отражения нормальной волны  $R_L$  от неоднородности рельефа дна при различных значениях параметров задачи. Известно, что в волноводах с проницаемым дном обратным рассеянием звуковых волн на практике почти всегда можно пренебречь [1]. Тем не менее конкретные оценки амплитуды отраженной волны в литературе практически отсутствуют. Поиск решения данной задачи будет проходить с помощью системы модовых уравнений погружения, выводу которых посвящен следующий раздел.

## 2. Вывод модовых уравнений погружения

Вывод уравнений погружения в данной заметке основан на проведенном выводе из работы [3], однако здесь приводятся соответствующие вычисления в интересах замкнутости изложения. Уравнение (2) и граничные условия (4) дифференцируются по  $L$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial L} A(x, L) + k^2(1 + \varepsilon(x)) \frac{\partial}{\partial L} A(x, L) = 0. \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial L} A(L, L) + \frac{i}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial L}(L, L) = -\frac{\partial A}{\partial x}(L, L) - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(L, L),$$

$$\frac{\partial}{\partial L} A(L_0, L) - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial L}(L_0, L) = 0. \quad (6)$$

Здесь под  $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial L}(L, L)$  понимается производная функции  $A(x, L)$  по  $x$ , в которой сделана подстановка  $x = L$ , после чего результат продифференцирован по  $L$ . Нетрудно заметить, что краевые задачи (2), (4) и (5), (6) отличаются только константами, стоящими в правой части первого граничного условия. По этой причине между решениями этих задач существует линейная связь:

$$\frac{\partial}{\partial L} A = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} A(L, L) - \frac{i}{k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(L, L) \right] A. \quad (7)$$

Необходимо выразить  $\frac{\partial}{\partial x} A(L, L)$  и  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} A(L, L)$  из первого граничного условия (4) и уравнения (2) соответственно и подставить в (7). Получается соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial L} A(x, L) = ik A(x, L) + \frac{1}{2} ik \varepsilon(L) A(L, L) A(x, L), \quad (8)$$

где  $A(L, L) = 1 + R(L)$  – поле на границе. Если добавить к равенству (8) начальное условие

$$A(x, L)|_{L \rightarrow x} = A(x, x) = 1 + R(x), \quad (9)$$

то получится задача Коши на функцию  $A(x, L)$ . Полная производная функции  $A(L, L)$  может быть представлена в виде

$$\frac{d}{dL} A(L, L) = \frac{\partial}{\partial x} A(x, L)|_{x \rightarrow L} + \frac{\partial}{\partial L} A(x, L)|_{x \rightarrow L}. \quad (10)$$

Первое слагаемое правой части равенства (10) можно выразить через уравнение (8) при  $x \rightarrow L$ , а второе – из первого граничного условия (4). Такая процедура приводит к новому уравнению на  $A(L, L)$ , которое имеет вид:

$$\frac{d}{dL} A(L, L) = 2ik (A(L, L) - 1) + \frac{1}{2} k \varepsilon(L) A^2(L, L). \quad (11)$$

В качестве начального условия для уравнения (11) полагается

$$A(L, L)|_{L \rightarrow L_0} = 1. \quad (12)$$

Теперь можно изменить зависимую переменную на коэффициент отражения  $R(L)$ , чтобы получить систему уравнений погружения:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial L} A(x, L) = ik A(x, L) + \frac{1}{2} ik \varepsilon(L)(1 + R(L))A(x, L), \\ A(x, L)|_{L \rightarrow x} = 1 + R(x); \\ \frac{d}{dL} R(L) = 2ik R(L) + \frac{1}{2} ik \varepsilon(L)(1 + R(L))^2, \\ R(L_0) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

### 3. Пример расчета коэффициентов отражения

В качестве примера рассматривается волновод в мелком море. За пределами участка волновода с неоднородным рельефом дна глубина  $h(x) = h_0 = 90$  м, в то время как на этом участке она задается формулой  $h(x) = h_0 + \Delta h \cdot \sin\left(\pi \frac{x - L_0}{L - L_0}\right)$ , где  $L_0 = 4800$  м и  $L = 5200$  м – левая и правая границы неоднородности соответственно. В водном слое плотность  $\rho_w = 1$  г/см<sup>3</sup>, а скорость звука  $c_w = 1500$  м/с; для дна заданы плотность  $\rho_b = 2$  г/см<sup>3</sup> и скорость звука  $c_b = 2000$  м/с. Далее полагается, что частота звука составляет 50 Гц. Для этого значения и указанных выше параметров волновода в нем возбуждается 4 водные моды для всех значений  $x$ .

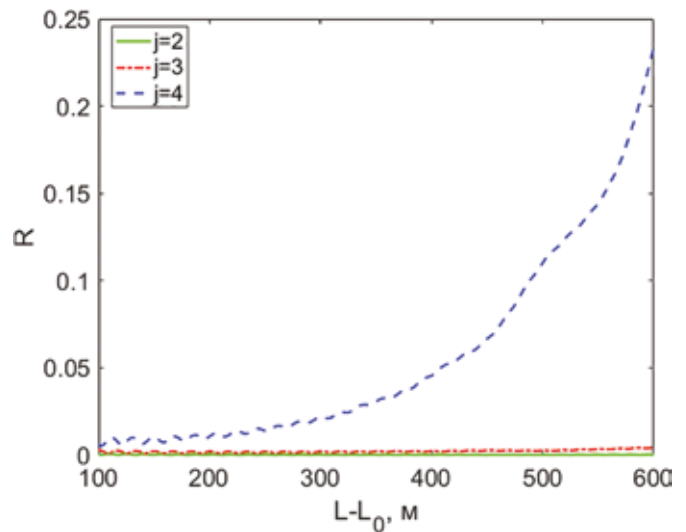
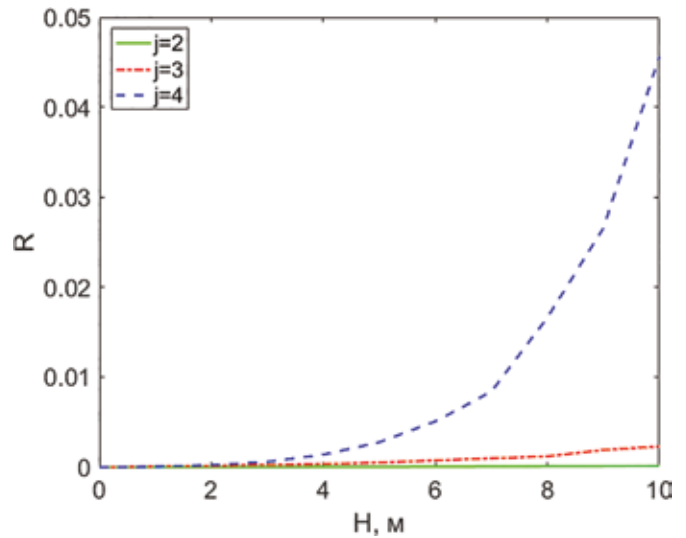


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения  $R$  от глубины  $\Delta h$  подвальной ямы (вверху) и от ширины неоднородности дна (внизу)

Сначала проводится варьирование перепада глубины  $\Delta h$  на неоднородном участке от 0 до 10 м с шагом 1 м, и для каждого значения находится решение уравнения Риккати из системы (13). На основе этих решений строится график коэффициента отражения  $R$ , показанный на рис. 2 (внизу). На графике видно, что данный коэффициент возрастает при увеличении глубины подводной ямы.

Теперь можно рассмотреть волновод с аналогичными параметрами, но при фиксированном значении перепада глубины, связанного с плавной неоднородностью рельефа дна  $\Delta h = 10$ . Положение левой границы в расчетах будет изменяться в пределах от 4600 м до 5100 м с шагом 1 м с тем, чтобы варьировать ширину неоднородного участка. На основе полученных результатов численного решения уравнения Риккати из системы (13) строится график (рис. 2, внизу) зависимости модуля коэффициента отражения от ширины неоднородного участка рельефа. Графики модуля  $R$  для 2-й и 3-й мод с увеличением ширины неоднородности рельефа дна обнаруживают угасающие по величине и амплитуде колебания. На графике абсолютного значения  $R$  для 4-й моды (высшей водной моды) также наблюдаются малые колебания угасающей амплитуды, при этом в среднем коэффициент значительно возрастает с увеличением ширины неоднородности.

## Заключение

В работе исследована зависимость коэффициента отражения нормальной волны, падающей на неоднородность батиметрии в мелком море. Во многих задачах акустики океана обратным рассеянием при волноводном распространении звука принято пренебрегать, однако, насколько известно авторам, ампли-

туда рассеянной волны для локализованных неоднородностей ранее никем не оценивалась. В рамках исследования соответствующие оценки выполнены в адиабатическом приближении, т.е. для ситуации, когда перекачкой звуковой энергии из одной моды в другую можно пренебречь. Таким образом, эффект обратного рассеяния был изолирован, чтобы оценить именно его вклад в формирование поля.

Приведенные выше оценки показали, что для водных мод амплитуда нормальной волны, рассеянной неоднородностью батиметрии в обратном направлении, может составлять лишь доли процента от амплитуды падающей, однако это не так для водной моды наивысшего номера; для неё амплитуда нормальной волны может достигать нескольких процентов, если неоднородность имеет большие размеры. Таким образом, на практике при расчетах звуковых полей эффектом обратного рассеяния действительно можно пренебрегать, если на акустической трассе имеется небольшое число неоднородностей батиметрии, которые не нарушают адиабатического характера распространения звука.

Для расчетов коэффициентов отражения было использовано модовое представление акустического поля, а соответствующая краевая задача для уравнения модовой амплитуды была сведена к уравнениям погружения. После этого коэффициент отражения был вычислен путем численного решения уравнения Риккати. Описанная методика может быть обобщена таким образом, чтобы учесть взаимодействие мод. В этом случае неизвестная функция в уравнении Риккати будет решаться для матричной функции. Этот подход будет развит в дальнейших работах авторов.

*Работа выполнена в рамках темы госзадания ТОИ ДВО РАН "Моделирование разномасштабных динамических процессов в океане" (№ 0271-2019-0001).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Jensen F., Kuperman W., Porter M., Schmidt H. Computational ocean acoustics. New-York: Springer, 2011. 772 p.
2. Кляцкин В.И., Динамика стохастических систем. М.: Физматлит, 2003. 240 с.
3. Babkin G.I., Klyatskin V.I., Invariant imbedding method for wave problems// Wave motion. 1982. Vol. 4, No. 3. С. 195–207.
4. Pierce A.D. Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium // The Journal of the Acoustical Society of America. 1965. Vol. 37, No. 1. С. 19–27.

## Об авторах

**КАЗАК Михаил Сергеевич**, инженер-исследователь  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН

**Адрес:** г. Владивосток, ул. Балтийская, 43

**Область научных интересов:** акустика океана, уравнения в частных производных, математическое моделирование

**E-mail:** kazak.ms@poi.dvo.ru

**Телефон:** +7(902)078-89-11

**ORCID ID:** 0000-0002-8141-8665

**ПЕТРОВ Павел Сергеевич**, к.ф.-м.н., заведующий лабораторией  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН

**Адрес:** г. Владивосток, ул. Балтийская, 43

**Область научных интересов:** акустика океана, уравнения в частных производных, математическое моделирование, метод параболического уравнения

**E-mail:** petrov@poi.dvo.ru

**Телефон:** +7(914)960-21-92

**ORCID ID:** 0000-0002-0087-6681

**КОШЕЛЬ Константин Валентинович**, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН

**Адрес:** г. Владивосток, ул. Балтийская, 43

**Область научных интересов:** геофизическая гидродинамика, вихревая динамика, радиофизика, теория волн, теория случайных процессов и полей, теория динамических систем

**E-mail:** kvkoshel@poi.dvo.ru

**Телефон:** +7(924)131-25-02

**ORCID ID:** 0000-0002-8014-7699

### Для цитирования:

Казак М.С., Петров П.С., Кошель К.В. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ МОД НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ РЕЛЬЕФА ДНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ // Подводные исследования и робототехника. 2021. № 2(36). С. 76–81. DOI: 10.37102/1992-4429\_2021\_36\_02\_08.

