

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫМИ КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛНАМИ В ГЛУБОКОМ МОРЕ

С.Б. Козицкий, И.С. Козицкая

Исследуются электромагнитные поля, индуцированные движениями проводящей жидкости бесконечной глубины во внешнем магнитном поле. Исходные уравнения Максвелла сформулированы через магнитный вектор Герца, и получены общие решения для электромагнитных полей и плотности тока для некоторого семейства потенциальных полей скорости жидкости. В частности, изучены электромагнитные эффекты, связанные с радиально-симметричной системой прогрессивных поверхностных волн в глубоком море, порожденной либо подводными осциллирующими источниками (точечный монополярный источник, вертикально колеблющаяся сфера), либо дисперсионным распадом изначально локализованных возмущений поверхности моря (волны Коши–Пуассона). Для начального возмущения поверхности жидкости специального вида получены аналитические выражения для электромагнитных полей в воздухе, индуцированных волнами Коши–Пуассона. Для этих решений рассмотрены их различные асимптотики, исследовано поведение полученных решений в случае больших времен и расстояний от начала координат. Оказалось, что вариации электромагнитного поля в воздухе на достаточно большой высоте над океаном могут быть вероятными предвестниками волн цунами. Результаты могут быть полезны в разработке систем детектирования волн цунами дистанционными методами.

Ключевые слова: поверхностные волны, волны цунами, вариации электромагнитного поля, магнитная гидродинамика.

Введение

Задача исследования состоит в математическом описании вариаций электромагнитных полей, индуцированных радиально-симметричной системой прогрессивных поверхностных волн на поверхности проводящей жидкости. Движение проводящей жидкости в постоянном внешнем магнитном поле при малых магнитных числах Рейнольдса, например движение морской воды в магнитном поле Земли, сопровождается взаимосвязанной системой электромагнитных полей и токов, которая, в свою очередь, почти не оказывает влияния на само движение жидкости [1]. Экспериментальное изучение электромагнитных полей с использованием как контактных, так и дистанционных технологий измерения дает информацию о динамике и параметрах исходных гидродинамических процессов, которая может представлять несомненный практический интерес.

Статья состоит из двух разделов. В первом разделе изучены электромагнитные эффекты, связанные с

радиально-симметричной системой прогрессивных поверхностных волн в глубоком море, индуцированной подводными осциллирующими источниками, такими как пульсирующий точечный монополярный источник или вертикально колеблющаяся сфера малого радиуса. Такого рода источники нередко ассоциируются с искусственными подводными объектами разной природы.

Во втором разделе решается задача получения аналитических выражений для электромагнитных полей, индуцированных волнами Коши–Пуассона в постоянном магнитном поле. В природе эти диспергирующие нестационарные волны формируются распадом начального локализованного возмущения и могут возникать, например, от камня, брошенного в воду.

В некоторых случаях задача описания возникновения волн цунами в океане сводится к задаче Коши–Пуассона [2]. В этом отношении изучение электромагнитных полей, производимых такими поверхностными волнами в проводящей жидкости при

постоянном внешнем магнитном поле имеет практическое приложение в конструировании систем раннего оповещения о цунами. И, что особенно важно, электромагнитные поля, индуцированные волнами цунами могут быть зарегистрированы до того, как будут зарегистрированы сами волны, они могут играть роль своего рода электромагнитных предвестников цунами [3].

1. Электромагнитные поля, индуцированные прогрессивными кольцевыми волнами

1.1. Исходные уравнения

Цель данного раздела получить аналитические решения для вариаций электромагнитного поля, вызванных поверхностными кольцевыми волнами, возбуждаемыми осциллирующими подводными источниками [4]. Рассматривается случай жидкости бесконечной глубины, имеющей постоянную электропроводность по всему объему, находящуюся в постоянном внешнем магнитном поле. Это поле \vec{F} имеет вертикальную F_z и горизонтальную F_y компоненты.

Декартова система координат выбрана таким образом, что ось z направлена вертикально вверх, а направление оси y совпадает с направлением горизонтальной компоненты внешнего магнитного поля. Поверхность раздела между водой и воздухом совпадает с плоскостью $z = 0$. В последующих обозначениях величины электромагнитных полей в воздухе выделяются нижним индексом a , при этом величины полей и токов в воде индекса не имеют.

Исходные уравнения для определения электромагнитных величин – это уравнения Максвелла в среде, записанные с использованием известных упрощающих предположений [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{F}], \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \frac{\varepsilon - 1}{c} [\vec{v}, \vec{F}], \end{aligned}$$

где: \vec{B} – магнитная индукция, \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{D} – электрическая индукция, \vec{J} – плотность электрического тока, c – скорость света в вакууме, σ – проводимость жидкости, \vec{v} – поле скоростей жидкости, ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Условия на поверхности раздела сред имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} D_{na} - D_n &= 4\pi q, \\ B_{na} &= B_n, \\ \vec{B}_{\tau a} &= \vec{B}_{\tau}, \\ \vec{E}_{\tau a} &= \vec{E}_{\tau}. \end{aligned} \quad (1)$$

Индекс n обозначает нормальную к поверхности раздела компоненту соответствующего вектора, τ обозначает тангенциальную компоненту, q – это плотность поверхностного заряда.

1.2. Уравнение для магнитного вектора Герца

В том случае, когда поле скоростей предполагается потенциальным, удобно записать эти уравнения и условия на поверхности раздела сред через магнитный вектор Герца \vec{P} и потенциал скоростей ϕ :

$$v_m \Delta \vec{P} - \partial_t \vec{P} = \phi \vec{F}, \quad \Delta \vec{P}_a = 0. \quad (2)$$

Здесь как вектор Герца \vec{P} , так и вектор внешнего постоянного магнитного поля $\vec{F} : (0, F_y, F_z)$ имеют две компоненты $\vec{P} : (0, P_y, P_z)$; $v_m = c^2 / 4\pi\sigma$ – магнитная вязкость.

Векторное уравнение (2) может рассматриваться как два отдельных скалярных уравнения для y и z компонент соответствующих векторов. Для воздуха уравнение превращается в обычное уравнение Лапласа. Компоненты векторов электромагнитного поля и плотности тока можно найти дифференцированием:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{P}, \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \partial_t \vec{P}, \\ \vec{J} &= -\frac{\sigma}{c} \operatorname{rot} (\partial_t \vec{P} + \phi \vec{F}), \\ \vec{v} &= -\operatorname{grad} \phi. \end{aligned} \quad (3)$$

Подстановка этих выражений в (1) позволяет получить условия на поверхности раздела сред при $z = 0$ для магнитного вектора Герца:

$$\begin{aligned} P_z &= P_{az}, \\ \partial_z P_y &= \partial_z P_{ay}, \\ \Delta P_y &= \Delta P_{ay}, \\ \partial_z P_z + \partial_y P_y &= \partial_z P_{az} + \partial_y P_{ay}. \end{aligned} \quad (4)$$

1.3. Форма потенциала скоростей жидкости

Предположим, что потенциал скоростей жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа и выбран в форме анзаца:

$$\phi(x, y, t) = R(x, y) e^{i\omega t + kz}, \quad (5)$$

где комплексная функция двух переменных $R(x, y)$ должна удовлетворять двумерному уравнению Гельмгольца:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)R + k^2 R = 0.$$

Например, в простейшем случае распространяющихся вправо поверхностных волн в глубоком море $R = R_0 e^{i\omega t - ikx + kz}$ с обычным дисперсионным соотношением $\omega^2 = kg$. Здесь ω – частота поверхностных волн, $k = 2\pi / \lambda$ – волновое число, связанное с длиной волны λ , g – ускорение свободного падения.

Решения для электромагнитных величин могут быть получены без дальнейшего уточнения формы функции $R(x, y)$. Таким образом, получаем решения для целого класса аналогичных задач, отличающихся по форме этой функции.

Далее рассматривается случай кольцевых прогрессивных волн, распространяющихся от источника. Для этого случая потенциал скоростей в дальней зоне $r \gg \lambda$ имеет форму [1]:

$$\phi(r, t) = A(k) \text{Im} \left[H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t + kz} \right], \quad (6)$$

где r – радиальная координата, $H_0^{(2)}$ – функция Ханкеля второго рода.

Амплитудный коэффициент $A(k)$ зависит от волнового числа k и определяется методом возбуждения волн. В частности, если волны производятся пульсирующим точечным монопольным источником, расположенным на глубине h и имеющим производительность $Q = Q_0 \cos \omega t$, то $A(k) = (Q_0 k / 2) e^{-kh}$. Если же генерация волн осуществляется вертикальными колебаниями сферы радиуса a с амплитудой M , расположенной на глубине h , то $A(k) = M \pi a^3 k^2 \sqrt{kg} e^{-kh}$ [4].

1.4. Решение для вектора Герца в общем виде

Ищется решение уравнений (2) с потенциалом (5) и с условиями на интерфейсе (4) в стандартной форме суперпозиции частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Для удобства вначале исключим множитель $e^{i\omega t}$ в выражениях \vec{P}, \vec{P}_a , для чего положим $\vec{P} = \vec{P} e^{i\omega t}$ и $\vec{P}_a = \vec{P}_a e^{i\omega t}$ (в дальнейшем штрихи будут опущены):

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\frac{1}{i\omega} \vec{F} R e^{kz} + \vec{G} e^{iz}, \\ \vec{P}_a &= \vec{G}_a e^{-kz}, \end{aligned} \quad (7)$$

где функции $\vec{G}(x, y)$ и $\vec{G}_a(x, y)$ удовлетворяют тому же уравнению Гельмгольца, что и функция $R(x, y)$. После подстановки этих выражений в интерфейсные условия (4) на поверхности $z = 0$ мы получаем уравнения для $\vec{G}(x, y)$ и $\vec{G}_a(x, y)$, решая которые получаем выражения для компонент вектора Герца:

$$\begin{aligned} P_y &= -\frac{1}{i\omega} F_y R e^{kz}, \\ P_{ay} &= \frac{1}{i\omega} F_y R e^{-kz}, \\ P_z &= \frac{1}{i\omega} \left[\frac{2}{\varkappa + k} e^{\varkappa z} \hat{S} - e^{kz} F_z \right] R, \\ P_{az} &= \frac{1}{i\omega} e^{-kz} \left[\frac{2}{\varkappa + k} \hat{S} - F_z \right] R. \end{aligned}$$

Здесь для краткости введен линейный оператор $\hat{S} = F_y \partial_y + k F_z$. Параметр \varkappa имеет размерность волнового числа: $\varkappa^2 = k^2 - k_0^2$, $k_0^2 = -i\omega / \nu_m$.

Введем характерную частоту $\omega_0 = (g/c) \sqrt[3]{4\pi\sigma c/g}$, где g – ускорение свободного падения. Зависимость величины ω_0 от электропроводности жидкости σ приведена на рис. 1.

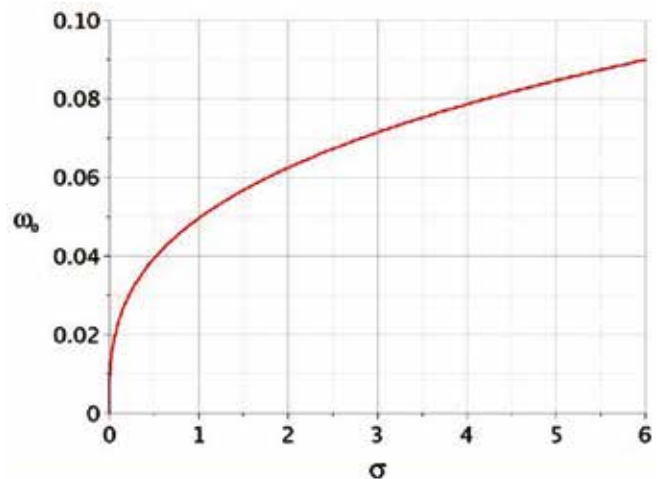


Рис. 1. Зависимость характерной частоты от электропроводности жидкости $\sigma \left(\frac{\text{СМ}}{\text{М}} \right)$

Используя дисперсионное соотношение $\omega^2 = kg$, получим выражения для действительной и мнимой частей $\varkappa = \alpha + i\beta$ (рис. 2):

$$\alpha = \frac{\omega^2 \sqrt{2}}{2g} \sqrt{1 + \sqrt{1 + (\omega_0 / \omega)^6}},$$

$$\beta = \frac{\omega^2 \sqrt{2}}{2g} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + (\omega_0 / \omega)^6}}.$$

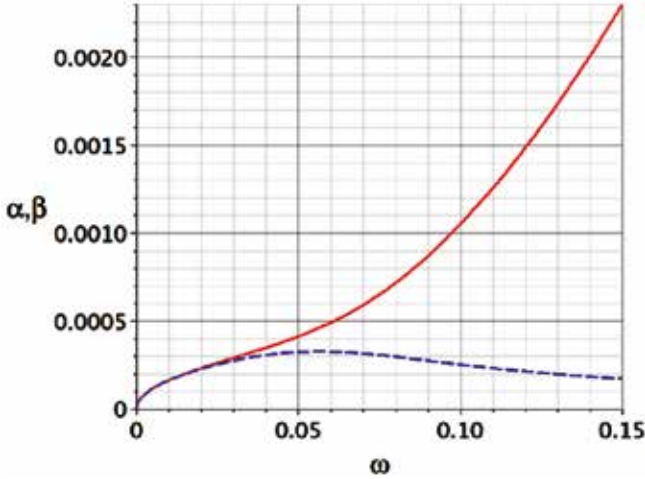


Рис. 2. Зависимость $\alpha(\omega)$ (верхняя кривая) и $\beta(\omega)$ (нижняя кривая) от ω , $\omega_0 = 0.08$

Решения уравнений для вектора Герца, ассоциированные с кольцевыми прогрессивными волнами, распространяющимися по поверхности глубокой жидкости с потенциалом скорости (6), таковы:

$$P_z = Ck^{-1} \left(2\bar{\omega}^3 k^{-2} \hat{S} \times \right. \\ \left. \times [(k - \alpha)\Lambda_3 - \beta\Lambda_4] e^{(\alpha - k)z} + F_z \Lambda_2 \right),$$

$$P_{az} = Ck^{-1} e^{-kz} \left(2\bar{\omega}^3 k^{-2} \hat{S} \times \right. \\ \left. \times [(k - \alpha)\Lambda_1 - \beta\Lambda_2] + F_z \Lambda_2 \right),$$

$$P_y = Ck^{-1} e^{kz} F_y \Lambda_2,$$

$$P_{ay} = -Ck^{-1} e^{-kz} F_y \Lambda_2,$$

$$\Lambda_1(r, t) = \text{Im} \left(H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t} \right),$$

$$\Lambda_3(r, z, t) = \text{Im} \left(H_0^{(2)}(kr) e^{i(\omega t + \beta z)} \right),$$

$$\Lambda_2(r, t) = \text{Im} \left(iH_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t} \right),$$

$$\Lambda_4(r, z, t) = \text{Im} \left(iH_0^{(2)}(kr) e^{i(\omega t + \beta z)} \right),$$

где $C(\omega) = (\omega / g) A(\omega^2 / g)$ и $\bar{\omega} = \omega / \omega_0$.

Выражения для компонент электромагнитного поля и плотности тока получаются дифференцированием формул (8) по правилам (3).

Используя асимптотические выражения для функций Ханкеля [5], далее напишем выражения для электромагнитных величин в дальней зоне $r \gg \lambda$.

1.5. Решения для вертикального внешнего магнитного поля

Для случая вертикального внешнего магнитного поля справедливо:

$$B_r = F_z C_1 \left[e^{\alpha z} (\xi(\psi_1) + \cos \psi_1) - e^{kz} \cos \theta_1 \right],$$

$$B_z = F_z C_1 \left[e^{\alpha z} (\xi(\psi_0) - \cos \psi_0) + e^{kz} \cos \theta_0 \right],$$

$$B_{ar} = F_z C_1 e^{-kz} \xi(\theta_1),$$

$$B_{az} = F_z C_1 e^{-kz} \xi(\theta_0),$$

$$E_y = F_z C_0 \left[e^{\alpha z} (\xi(\psi_0) - \cos \psi_0) + e^{kz} \cos \theta_0 \right],$$

$$E_{ay} = F_z C_0 e^{-kz} \xi(\theta_0),$$

$$J_\gamma = \sigma F_z C_0 e^{\alpha z} (\xi(\psi_0) - \cos \psi_0).$$

Здесь индексы r и γ обозначают радиальную и тангенциальную компоненты векторов соответственно. Имеем:

$$\theta_m = \omega t - kr + \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\psi_m = \theta_m + \beta z,$$

$$\xi(\theta) = 2\bar{\omega}^3 k^{-2} (\alpha - k) (\beta \cos \theta - k \sin \theta),$$

$$C_1(r) = 2 \frac{C}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{r}}, \quad C_0(r) = \frac{\lambda}{\lambda_0} C_1(r),$$

$$\lambda = 2\pi g / \omega^2 \quad \lambda_0 = 2\pi c / \omega.$$

Полученные выражения имеют следующие особенности: все величины убывают экспоненциально с расстоянием от поверхности жидкости и убывают по цилиндрическому закону $1/\sqrt{r}$ с увеличением расстояния от начала координат; они также имеют периодическую зависимость от времени и с точностью $1/\sqrt{r}$ периодически зависят от горизонтальной координаты. Каждая величина имеет цилиндрическую симметрию и имеет форму прогрессивной волны, распространяющейся от источника. Индуцированный вектор магнитного поля лежит в плоскостях, проходящих через вертикальную ось. В каждой точке пространства над поверхностью жидкости вектор вращается со временем, описывая окружность. Под поверхностью эта окружность деформируется. Электрическое поле и плотность тока имеют только компоненты, направленные вдоль гребней волн. Линии электрического тока, будучи замкнутыми, формируют систему концентрических окружностей. Следует также отметить, что из-за эффекта самоиндукции тангенциальная компонента электрического поля отлична от нуля и достигает максимума на частоте $\omega \approx \omega_0$.

1.6. Решения для горизонтального внешнего магнитного поля

Для случая горизонтального внешнего постоянного магнитного поля справедливо для магнитного поля в жидкости:

$$\begin{aligned}
 B_x &= \frac{1}{2} F_y C_1 \left[e^{\alpha z} (\xi(\psi_0) + \cos \psi_0) - e^{kz} \cos \theta_0 \right] \sin 2\gamma, \\
 B_y &= \frac{1}{2} F_y C_1 \left[e^{\alpha z} (\xi(\psi_0) + \cos \psi_0) - e^{kz} \cos \theta_0 \right] (1 - \cos 2\gamma), \\
 B_z &= F_y C_1 \left[e^{\alpha z} (\xi(\psi_1) - \cos \psi_1) + e^{kz} \cos \theta_1 \right] \sin \gamma.
 \end{aligned}$$

Для магнитного поля в воздухе:

$$\begin{aligned}
 B_{ax} &= \frac{1}{2} F_y C_1 e^{-kz} \xi(\theta_0) \sin 2\gamma, \\
 B_{ay} &= \frac{1}{2} F_y C_1 e^{-kz} \xi(\theta_0) (1 - \cos 2\gamma), \\
 B_{az} &= F_y C_1 e^{-kz} \xi(\theta_1) \sin \gamma.
 \end{aligned}$$

Для электрического тока и электрического поля в жидкости имеем:

$$\begin{aligned}
 J_x &= \sigma \frac{1}{2} F_y C_0 e^{\alpha z} (\xi(\psi_1) - \cos \psi_1) (1 - \cos 2\gamma), \\
 J_y &= -\sigma \frac{1}{2} F_y C_0 e^{\alpha z} (\xi(\psi_1) - \cos \psi_1) \sin 2\gamma, \\
 E_x &= \frac{1}{2} F_y C_0 \left[e^{\alpha z} (\xi(\psi_1) - \cos \psi_1) (1 - \cos 2\gamma) + 2e^{kz} \cos \theta_1 \right], \\
 E_y &= -\frac{1}{2} F_y C_0 e^{\alpha z} (\xi(\psi_1) - \cos \psi_1) \sin 2\gamma, \\
 E_z &= F_y C_0 e^{kz} \sin \theta_1 \cos \gamma.
 \end{aligned}$$

Для электрического поля в воздухе и для плотности поверхностного электрического заряда получается:

$$\begin{aligned}
 E_{ax} &= \frac{1}{2} F_y C_0 e^{-kz} \left[(\xi(\theta_1) - \cos \theta_1) (1 - \cos 2\gamma) + 2\cos \theta_1 \right], \\
 E_{ay} &= -\frac{1}{2} F_y C_0 e^{-kz} (\xi(\theta_1) - \cos \theta_1) \sin 2\gamma, \\
 E_{az} &= -F_y C_0 e^{-kz} \sin \theta_1 \cos \gamma, \\
 q &= -\frac{1}{2\pi} F_y C_0 \sin \theta_1 \cos \gamma.
 \end{aligned}$$

Как следует из приведенных выше выражений для случая горизонтального внешнего магнитного поля все три компоненты индуцированного электрического и магнитного полей в воздухе и в жидкости не обращаются в ноль. И их величины существенно зависят от полярного угла .

Линии электрического тока формируют замкнутые конфигурации, симметричные по отношению к началу координат и к осям x и y . Условия непротекания электрического тока через поверхность приводят к возникновению поверхностных зарядов q и, следовательно, к электростатическим полям E_{az}, E_z .

2. Электромагнитные поля, индуцированные нестационарными кольцевыми волнами

2.1. Постановка задачи и метод решения

Необходимо получить аналитические выражения для электромагнитных полей, индуцированных волнами Коши–Пуассона в постоянном магнитном поле. Задача рассматривается в приближении глубокого океана, однородного по электрической проводимости. Декартова система координат выбрана так, что направление оси совпадает с направлением горизонтальной проекции вектора внешнего магнитного поля \vec{F} . Ось z направлена вертикально вверх. Величины, относящиеся к воде, взяты без индекса, а величины в воздухе отмечены подстрочным индексом a .

Задачу удобно решать, если записать уравнения Максвелла через магнитный векторный потенциал Герца (2). Компоненты электромагнитного поля и плотности электрического тока можно найти из вектора Герца, используя выражения (3). Уравнение (2) решается для каждой из сред с использованием условий на поверхности $z = 0$ раздела сред (4).

Поскольку волны задачи Коши–Пуассона нестационарны, представляется удобным для получения решений уравнения (2) использовать метод преобразования Лапласа. Согласно этому методу мы связываем с вектором Герца и с потенциалом скорости

их интегральные изображения: $\mathcal{L}(\vec{P}(t)) = \vec{u}(p)$; $\mathcal{L}(\phi(t)) = s(p)$. Уравнение (2) также подвергается преобразованию Лапласа с нулевыми начальными условиями для $\vec{P}(t)$.

2.2. Решение для вектора Герца

В результате получается система уравнений для $\vec{u}(p)$. Решая ее с интерфейсными условиями (3), мы

найдем эту функцию и, переходя обратно от изображений к оригиналам, получим решение для $\bar{P}(t)$:

$$v_m \Delta \bar{u} - p \bar{u} = s \bar{F}, \quad \Delta \bar{u}_a = 0.$$

Сначала получим решения для элементарного потенциала, имеющего следующий вид:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 0 \text{ for } t < 0 \text{ and} \\ \phi(t) &= R(x, y) e^{kz} \sin \omega t \text{ for } t \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Его изображение таково:

$$s(p) = R e^{kz} \left(\omega / (\omega^2 + p^2) \right).$$

Здесь k – волновое число, ω – частота. Решение для изображения вектора Герца выглядит так:

$$\begin{aligned} u_y &= -G(p) F_y e^{kz} R(x, y), \\ u_{ay} &= G(p) F_y e^{-kz} R(x, y), \\ u_z &= M(p) e^{\varkappa(p)z} \left(F_z + F_y \frac{\partial}{k \partial y} \right) R(x, y) + \\ &+ G(p) \left(F_z \left(e^{\varkappa(p)z} - e^{kz} \right) + F_y \frac{\partial}{k \partial y} \right) R(x, y), \\ u_{az} &= M(p) e^{-kz} \left(F_z + F_y \frac{\partial}{k \partial y} \right) R(x, y) + \\ &+ G(p) e^{-kz} F_y \frac{\partial}{k \partial y} R(x, y). \end{aligned}$$

$$G(p) = \frac{1}{p} \frac{\omega}{\omega^2 + p^2},$$

$$\begin{aligned} M(p) &= \frac{1}{\Omega^2} \frac{2\Omega}{\Omega^2 + (p/\bar{\alpha})^2} \left(\frac{\bar{\alpha}}{p} \right)^2 \times \\ &\times \left[\left(\sqrt{1 + (p/\bar{\alpha})} - 1 \right) - \frac{1}{2} (p/\bar{\alpha}) \right], \end{aligned}$$

где $\bar{\alpha} = v_m k^2$ и $\Omega = \omega / \bar{\alpha}$. Здесь введено обозначение

$$\varkappa(p) = \sqrt{k^2 + v_m^{-1} p}.$$

По полученным изображениям можно восстановить исходные функции. Далее мы ограничимся рассмотрением только полей в воздухе и получим оригиналы функций $G(p)$ and $M(p)$:

$$\mathcal{L}^{-1}(G(p)) = f_1(t) = \frac{1}{\omega} (1 - \cos(\omega t)),$$

$$\mathcal{L}^{-1}(M(p)) = f_2(t) = f(\bar{\alpha} t),$$

$$f(t) = \frac{2}{\bar{\alpha} \Omega} \left(\frac{\sin \Omega t}{\Omega} + \frac{\cos \Omega t}{2} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(t + \frac{1}{2} \right) \left(\operatorname{erf}(\sqrt{t}) - 1 \right) + \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-t} \right] - \psi(t) \right),$$

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \frac{1}{\Omega} \operatorname{Im} \left(\sqrt{1 + i\Omega} e^{i\Omega t} \operatorname{erf}(\sqrt{1 + i\Omega} \sqrt{t}) \right) = \\ &= \frac{1}{\Omega} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{Im} \left(F_1(1, 1/2, (1 + i\Omega)t) \right). \end{aligned}$$

Здесь $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл вероятности и $F_1(a, c, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера.

2.3. Некоторые асимптотические оценки

Рассмотрим безразмерный параметр Ω :

$$\Omega = \omega / \bar{\alpha} = (kg)^{1/2} / (v_m k^2) = (\lambda / \lambda_m)^{3/2},$$

где $\lambda_m = (v_m^2 / g)^{1/3}$.

Оказывается, что величина Ω определяется отношением характерного размера возмущения λ к электромагнитной длине λ_m , которая зависит от электропроводности морской воды и определяет в нашем случае естественный пространственный масштаб (см. рис. 3).

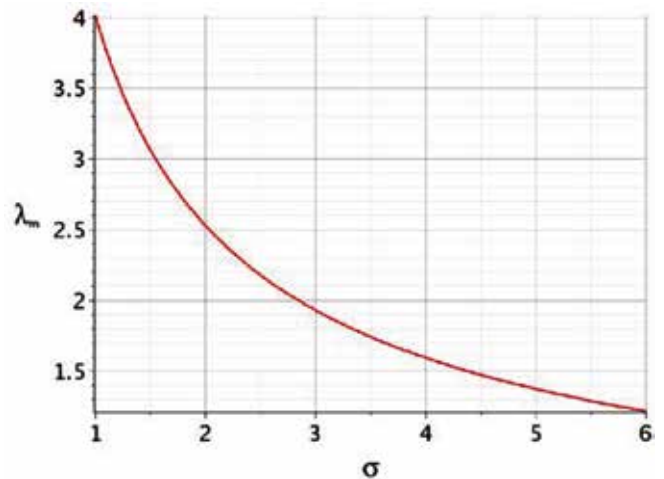


Рис. 3. Зависимость λ_m (км) от проводимости морской воды σ (См/м)

Качественное поведение решений зависит от относительного размера волновых возмущений в терминах этого пространственного масштаба. С уменьшением этого размера величина Ω также уменьшается. Если $\Omega \ll 1$, то для всех моментов времени с точностью до членов второго порядка по Ω получается:

$$\bar{\alpha} f(t) = -\frac{1}{4} \sin(\Omega t) + \Omega \left(f_0(t) + \frac{1}{8} \cos(\Omega t) \right),$$

$$f_0(t) = \left(\frac{1}{8} - \frac{t}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) (\operatorname{erf}(\sqrt{t}) - 1) + \left(\frac{t^2}{3} + \frac{t}{3} - \frac{1}{4} \right) \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp(-t).$$

Окончательно выпишем решение для вектора Герца, возбужденного элементарным потенциалом (9) в воздухе:

$$\begin{aligned} P_{ay} &= f_1(t) F_y e^{-kz} R(x, y), \\ P_{az} &= f_2(t) e^{-kz} \left(F_z + F_y \frac{\partial}{k \partial y} \right) R(x, y) + \\ &+ f_1(t) e^{-kz} F_y \frac{\partial}{k \partial y} R(x, y). \end{aligned} \quad (10)$$

2.4. Потенциал скоростей волн Коши–Пуассона

Электромагнитные поля, возбуждаемые дисперсионным распадом локализованного возмущения морской поверхности, можно найти исходя из общего вида потенциала скоростей жидкости для этого случая [4]:

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^\infty \sqrt{kg} e^{kz} \sin \sqrt{kg} t J_0(kr) \times \\ &\times \left[\int_0^\infty r' J_0(kr') N(r') dr' \right] dk. \end{aligned}$$

Здесь $J(kr)$ – функция Бесселя, $N(r)$ – исходная радиально-симметричная форма поверхности.

2.5. Вектор Герца, возбужденный волнами Коши–Пуассона

Чтобы найти компоненты вектора Герца, соответствующего такому потенциалу скоростей, необходимо в выражениях (10) для $R(x, y)$ подставить $R(x, y) = \omega J_0(kr) \int_0^\infty r' J_0(kr') N(r') dr'$ и проинтегрировать их по k в полубесконечных пределах:

$$\begin{aligned} P_{ay} &= F_y \int_0^\infty f_1(t) \sqrt{kg} e^{-kz} J_0(kr) \times \\ &\times \left[\int_0^\infty r' J_0(kr') N(r') dr' \right] dk, \\ P_{az} &= -F_y \sin \gamma \int_0^\infty f_1(t) \sqrt{kg} e^{-kz} J_1(kr) \times \\ &\times \left[\int_0^\infty r' J_0(kr') N(r') dr' \right] dk + \\ &+ \int_0^\infty f_2(t) \sqrt{kg} e^{-kz} \times \\ &\times \left[F_z J_0(kr) - F_y J_1(kr) \sin \gamma \right] \times \end{aligned} \quad (11)$$

$$\times \left[\int_0^\infty r' J_0(kr') N(r') dr' \right] dk.$$

Таковы окончательные общие решения задачи определения электромагнитных полей в воздухе, индуцированных распадом радиально-симметричных начальных возмущений поверхности проводящей жидкости в постоянном внешнем магнитном поле при малых магнитных числах Рейнольдса Re_m . Компоненты электромагнитных велчин можно найти по формулам (3). Если необходимо найти электромагнитные поля, индуцированные начальным локализованным импульсом давления в воде, то решения (11), продифференцированные по времени, дадут нам искомый результат для профиля начального импульса давления $P(r) = (\rho / g) N(r)$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения.

2.6. Поведение решений на оси $r = 0$

Рассмотрим различные асимптотики полученных решений. Предположим для определенности, что начальная форма поверхности жидкости задана формулой (см. рис. 4):

$$N(r) = A[1 + (r/a)^2]^{-3/2}. \quad (12)$$

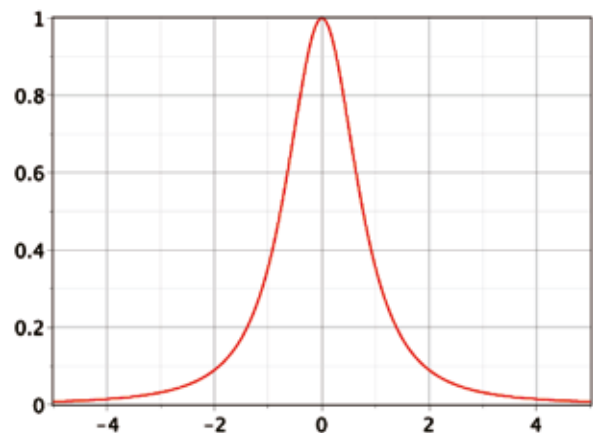


Рис. 4. Начальная форма поверхности моря $N(r)$ для $A = 1$ и $a = 1$

Удобно ввести безразмерные переменные $r' = r/a$, $z' = z/a$ и $t' = (g/4a)^2 t$. Далее штрихи будут опущены. Также введем безразмерные параметры $Re_m = A\sqrt{ga}/v_m$ и $L_m = 2(A/a)(\sqrt{ga}/c)$. Предположим, что размер возмущения достаточно мал, так что для почти всех величин волнового числа справедливо $\Omega \ll 1$. Фактически для этого необходимо, чтобы $a \ll l \approx 1.5$ км. Положим $r = 0$ и напомним

решения для ненулевых компонент электромагнитного поля на этой оси (см. рис. 5):

$$B_{az} = -\frac{1}{2} F_z Re_m \frac{t}{(1+z)^2} F_1\left(2, 3/2, -\frac{t^2}{1+z}\right),$$

$$B_{ay} = -\frac{1}{2} F_y Re_m \frac{t}{(1+z)^2} F_1\left(2, 3/2, -\frac{t^2}{1+z}\right),$$

$$E_{ax} = -F_y L_m \frac{t}{(1+z)^3} F_1\left(3, 3/2, -\frac{t^2}{1+z}\right),$$

$$\zeta(0, t) = A F_1(2, 1/2, -t^2).$$

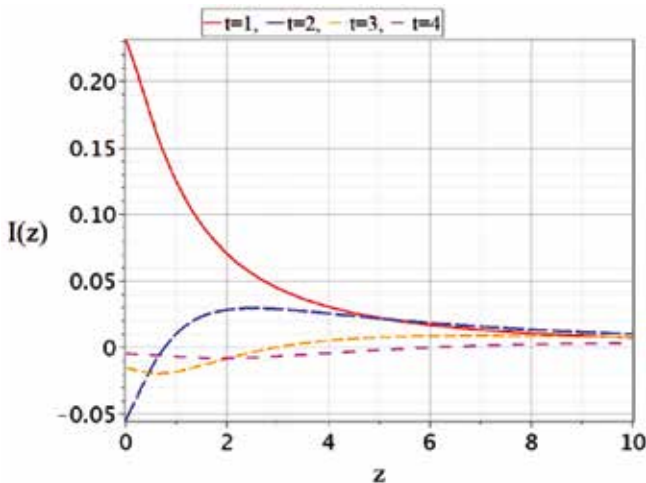


Рис. 5. Функция $I = \frac{t}{(1+z)^2} F_1(2, 3/2, -t^2/(1+z))$ от z при $t = 1, 2, 3, 4$

2.7. Поведение решений при больших r и t

Рассмотрим, как компоненты поля ведут себя в пространстве, если время, прошедшее с распада начального возмущения, достаточно велико. И поскольку, как уже объяснялось, электрические и магнитные поля аналогичны в своем поведении, ограничимся только магнитными полями. Изучим формулы (11) с начальным возмущением (12) методом стационарной фазы [6] и получим следующие результаты:

$$B_{ax} = -\frac{1}{8} Re_m (2F_z I_1 \cos \gamma + F_y I_0 \sin 2\gamma),$$

$$B_{ay} = -\frac{1}{8} Re_m (2F_z I_1 \sin \gamma + F_y I_0 (1 - \cos 2\gamma)),$$

$$B_{az} = -\frac{1}{4} Re_m (F_z I_0 + F_y I_1 \sin \gamma).$$

Здесь функции I_0 и I_1 таковы:

$$I_0 = \frac{t\sqrt{2}}{r^2} \exp\left[-\frac{t^2}{r^2}(1+z)\right] \sin\left(\frac{t^2}{r}\right),$$

$$I_1 = \frac{t\sqrt{2}}{r^2} \exp\left[-\frac{t^2}{r^2}(1+z)\right] \cos\left(\frac{t^2}{r}\right).$$

Как и ожидалось, компоненты магнитного поля формируют в пространстве пакет осцилляций, который распространяется от начала со скоростью $v = [ga(1+z)/4]^{1/2}$ на каждой высоте (см. рис. 6). Скорость пакета возрастает с увеличением высоты. Этот эффект может быть объяснен тем фактом, что в бесконечно глубоком море с увеличением длины гармонической волны ее фазовая скорость бесконечно возрастает. Тем не менее, поскольку имеет место экспоненциальное ослабление индуцированных полей отдельных гармоник с высотой, и ослабление тем сильнее, чем короче длина волны гармоники, получается, что на более высоких частотах коротковолновые компоненты отфильтровываются, а остающиеся более быстрые длинноволновые компоненты дают основной вклад в вариации электромагнитного поля.

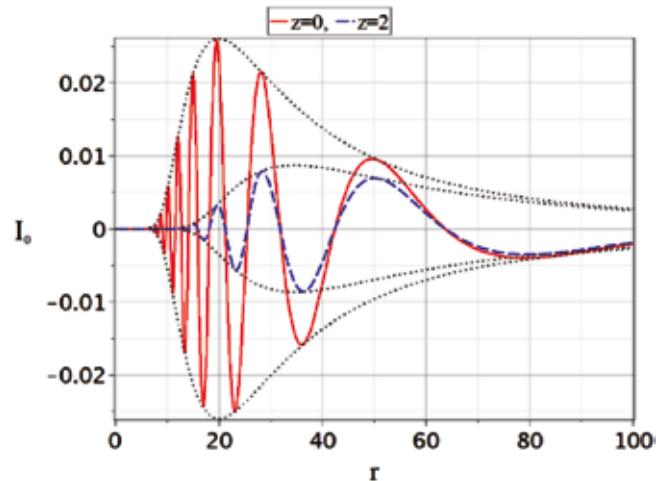


Рис. 6. Функции $I_0(20,0, r)$ и $I_0(20,2, r)$ от r для $t = 20$ и $z = 0,2$

3. Выводы

В статье изучены электромагнитные эффекты, связанные с радиально-симметричной системой прогрессивных поверхностных волн в глубоком море, индуцированной подводными осциллирующими источниками или дисперсионным распадом начальных локализованных возмущений морской поверхности.

1. Исходные уравнения Максвелла сформулированы через магнитный вектор Герца, и для целого семейства потенциальных полей скорости жидкости получены общие решения для электромагнитных полей и плотности тока.

2. В частности, рассмотрены электромагнитные поля, индуцированные подводными осциллирующими

ми источниками, такими как пульсирующий точечный монополюсный источник и вертикально колеблющаяся сфера малого радиуса.

3. Получены аналитические выражения для электромагнитных полей в воздухе, индуцированных волнами Коши–Пуассона, возникающих при распаде начального локализованного возмущения поверхности жидкости. Считается, что решения для волн такого типа могут хорошо описывать распространение волн цунами в океане.

4. Рассмотрен конкретный пример, когда для локального возмущения поверхности жидкости специального типа найдены решения для электромагнитных полей в воздухе при малых магнитных числах

Рейнольдса. Для этих решений рассмотрены их различные асимптотики.

5. Исследовано поведение полученных решений в случае больших времен и расстояний от начала координат. Оказалось, что скорость распространения пакета колебаний электромагнитного поля, индуцированных диспергирующими кольцевыми волнами, увеличивается с ростом высоты. Это дает возможность рассматривать в данном случае вариации электромагнитного поля в воздухе на достаточно большой высоте над океаном как предвестники волн цунами.

Результаты могут быть полезны при детектировании волн цунами дистанционными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sanford T.B. (1971) Motionally Induced Electric and Magnetic Fields in the Sea. // Journal of Geophysical research. 1971. Vol. 76, No. 15. P. 3476–3492.
2. Мурти Т.С. Сейсмические морские волны цунами. Л.: Гидрометеоздат, 1981. 446 с.
3. Белоконов В.И., Родкин А.Ф., Смаль Н.А. Возмущения магнитного поля Земли – возможные предвестники волн цунами // Электромагнитные и акустические процессы в океане. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 1987. 188 с.
4. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
5. Лаврентьев М.А., Шаббат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
6. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 584 с.

Об авторах

КОЗИЦКИЙ Сергей Борисович, к.ф.-м.н.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт имени В.И. Ильичёва ДВО РАН

Адрес: 690041, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43

Научные интересы: акустика океана, гидродинамика, океанология, магнитная гидродинамика, математическое моделирование, метод амплитудных уравнений

Тел.: +7(924)5276801

E-mail: skozii@poi.dvo.ru

ORCID ID: 0000-0002-0231-8851

КОЗИЦКАЯ Ирина Сергеевна

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт имени В.И. Ильичёва ДВО РАН

Адрес: 690041, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43

Научные интересы: математическая биология, акустика океана, математическое моделирование

Тел.: +7(994)0115284

E-mail: irkozic@gmail.com

ORCID ID: 0000-0002-9212-6238

Для цитирования:

Козицкий С.Б., Козицкая И.С. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫМИ КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛНАМИ В ГЛУБОКОМ МОРЕ // Подводные исследования и робототехника. 2021. № 2(36). С. 66–75. DOI: 10.37102/1992-4429_2021_36_02_07.