

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ПОДВОДНОГО АППАРАТА: КРАТКИЙ ОБЗОР

**В.В. Костенко, А.Ю. Толстоногов**

Существуют различные подходы к постановке задачи управления движением необитаемого подводного аппарата. Подводный аппарат может быть рассмотрен как единый управляемый объект, включающий в себя как динамику твердого тела, так и динамику исполнительных механизмов. В то же время существуют подходы, в которых задача управления делится на две независимых: в первой решается задача управления движением, во второй решается задача распределения сформированных управляющих команд на исполнительные механизмы движительно-рулевого комплекса. В статье представлен обзор различных подходов к решению задачи распределения управляющих воздействий, сформированных системой управления движением подводного аппарата. Показаны различные подходы и методы решения задач для различных типов движительно-рулевых комплексов. Представлены примеры программных пакетов, позволяющих численно решать задачи распределения управляющих воздействий в формулировках квадратичной оптимизации и управления по прогнозирующим моделям. Приведены примеры еще не решенных задач, которые требуют дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** необитаемый подводный аппарат, система управления движением, исполнительные механизмы, движительно-рулевой комплекс, управление по прогнозирующим моделям

## Введение

Задача распределения управляющих воздействий (control allocation\*) возникает естественным образом для избыточного (over-actuated) движительно-рулевого комплекса (ДРК) подводного аппарата (ПА), то есть такого ДРК, в котором исполнительных механизмов (ИМ) (рули управления, основные и подруливающие движители) больше, чем количество доступных для управления степеней свободы. Использование ДРК такого типа широко распространено по следующим причинам:

- ввиду того, что подводные операции сопряжены с высокой степенью риска, избыточность необходима для реализации функций резервирования систем управления движением подводного аппарата;
- в силу гидродинамических особенностей функ-

\* Здесь и далее в скобках фигурирует терминология, наиболее часто встречающаяся в иностранных научных изданиях

ционирования при различных режимах движения (позиционный, крейсерский) часть исполнительных механизмов ДРК будет работать лучше или хуже; в соответствии с этим при разработке многоцелевых подводных аппаратов необходимо использовать избыточные комплекты ИМ [1];

- избыточная конфигурация ДРК при энергетически оптимальном распределении управляющего воздействия позволяет сократить затраты энергии на 20–25% по сравнению с эквивалентной неизбыточной конфигурацией [2].

Решение задачи распределения управляющих воздействий ДРК позволяет оптимизировать энергетические затраты на движение ПА, обеспечить отказоустойчивость системы управления и уменьшить механический износ ИМ в условиях накладываемых на них ограничений [3,4]. Исторически первой эта задача возникла в двух областях: для систем управления многостепенными манипуляторами [5] и самолётами [6]. Основной целью тогда было создание

систем аккомодации, то есть формирования такой системы управления движением, которая была бы устойчива к выходу из строя отдельных исполнительных механизмов.

В общем случае задача распределения управляющих воздействий для избыточных систем управления ведет к задаче численной оптимизации с линейными ограничениями, решение которой сложно реализовать для высокочастотных управляющих контуров в условиях операционных систем реального времени.

В настоящее время имеется достаточное количество обзорных статей в иностранной научной литературе, посвященных задаче распределения управляющих воздействий, включая как отдельные приложения – суда, подводные аппараты [7], летательные средства [8, 9], так и междисциплинарные [10]. В отечественной литературе такая постановка задачи обычно не выделяется в отдельный класс [11] и, например, задача аккомодации к отказам исполнительных механизмов решается на основании данных о параметрах движения объекта управления [12,13]. Впрочем, упоминание задачи распределения управляющих воздействий можно найти в отдельных статьях [14–16] и главах диссертации [17].

Целью данной статьи является литературный обзор существующих подходов в рамках задачи распределения управляющих воздействий с учетом научных достижений за последнее десятилетие в области подводной робототехники. Статья структурирована следующим образом. В разделе 1 приведены математическая формулировка задачи распределения управляющих воздействий и обоснование выделения её в отдельный класс задачи управления. Раздел 2 посвящён описанию динамической модели подводного аппарата, а также моделей, чаще всего встречающихся для ИМ ДРК. В разделе 3 представлен формализованный способ описания ДРК. В разделе 4 представлены существующие на данный момент методы решения задачи распределения управляющих воздействий. В разделе 5 приводятся ссылки на существующие в открытом доступе программные средства, позволяющие решать задачу в режиме реального времени.

## 1. Формулировка задачи распределения управляющих воздействий

Пусть динамика подводного аппарата, оснащенного избыточным ДРК, определена в формулировках метода пространства состояний следующим образом:

$$\dot{x}(t) = a(x(t)) + B_u(x(t))u(t), \quad (1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы;  $u \in U \subset \mathbb{R}^k$  – вектор управления исполнительными механизмами (control input), где подмножество  $U$  можно интерпретировать как ограничение величины команд управления, вызванное насыщением статической характеристики движителей, механическими ограничениями угла поворота рулей или иными особенностями ИМ;  $a(x(t)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  представляет собой гладкую нелинейную функцию, описывающую управляемую систему; матрица  $B_u(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times k}$  определяет влияние вектора управления на состояние системы. Пусть ранг матрицы  $B_u(x(t))$  равен  $m$  и он меньше, чем  $k$ , вследствие избыточности ДРК. Такая матрица является недоопределённой, а соответствующая ей система либо имеет бесконечное число линейно независимых решений по параметру  $u$ , либо не имеет решений вовсе. Матрица  $B_u(x(t))$  может быть разложена следующим образом:

$$B_u(x) = B_v(x)B(x), \quad (2)$$

где обе матрицы  $B_v(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  и  $B(x) \in \mathbb{R}^{m \times k}$  обладают рангом  $m$ . Это ведёт к новому описанию динамической системы, которое может быть представлено следующим образом:

$$\dot{x}(t) = a(x(t)) + B_v(x(t))v(t), \quad (3)$$

$$v(t) = B(x(t))u(t), \quad (4)$$

где  $v(t) \in A \subset \mathbb{R}^m$  можно интерпретировать как обобщенное действие всех исполнительных механизмов на объект управления или вектор виртуального управления (virtual input), а подмножество  $A$  получается аффинным преобразованием из подмножества  $U$  под действием матрицы  $B(x)$ .

Удобно раскладывать матрицу  $B_u(x)$  таким образом, чтобы матрица  $B_v(x)$  была квадратной ( $m = n$ ). При этом матрица будет полноранговой, а решение уравнения для первой части системы единственным. В качестве вектора управления удобно использовать обобщенный вектор сил и моментов, действующих на объект управления в связанной с ним системе координат (ССК). При  $n = 6$  его можно определить как  $v = [f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z]^T$ , где  $f_x, f_y, f_z$  – проекции сил, затребованных системой управления движением, на продольную поперечную и нормальную оси связанной с аппаратом системы координат, а  $m_x, m_y, m_z$  – соответствующие затребованные проекции моментов.

Тем не менее матрица  $B(x)$  в случае избыточного ДРК остается недоопределённой. Фактически это ведет к тому что для вектора  $v$ , который был затребован системой управления, может быть неопределённое множество решений уравнения (4).

Задача поиска оптимального вектора управления движением может быть поставлена в рамках обоих вариантов описания системы, представленных выше. Пусть задача оптимального управления поставлена в рамках квадратичной оптимизации, тогда для описания (1) задача будет сформулирована следующим образом [18]:

$$\min_u \int_0^{\infty} [q(x) + u^T R_u(x)u] dt, \quad (5)$$

при условии  $u \in U$ ,

где  $q(x) \geq 0$ ,  $R_u(x) = R_u^T(x) \geq 0$  – некоторые критерии оптимизации.

При этом описание (3)(4) естественным образом ведет к постановке двух независимых оптимизационных задач, которые могут быть записаны следующим образом:

$$\min_v \int_0^{\infty} [q(x) + v^T R_v(x)v] dt, \quad (6)$$

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m, s \in \mathbb{R}^m} (\|Qs\| + J(x, u, t)), \quad (7)$$

при условии  $v - B(x)u = s$ ,  $u \in U$ ,

где  $q(x) \geq 0$ ,  $R_v(x) = R_v^T(x) \geq 0$ , а  $s$  представляет собой невязку вектора виртуального управления, которая определяет меру различия между заданным и сформированным векторами управления,  $Q$  – матрица, формализующая приоритеты работы тех или иных осей управления при выходе вектора  $v$  за пределы допустимого множества  $A$ , а  $J(x, u, t)$  – некоторый функционал качества.

В работе [18] показано, что оптимальность решения сохраняется при переходе от задачи оптимизации (5) к двум независимым задачам (6) и (7). При этом второй подход позволяет достичь следующих преимуществ:

- решение задачи оптимального управления (6) для нелинейных систем трудоемко и требует значительных численных расчётов, но при этом, в случае неизменного критерия оптимизации  $R_v$  и изменяющихся критериев оптимизации  $J(x, u, t)$  и  $Q$ , нет необходимости заново получать решение уравнения (6);
- в первом подходе изменение параметров оптимизации  $R_u$  влияет как на изменение поведения системы в целом, так и на изменение распределения управляющих команд. Во втором случае задачи изолированы друг от друга и изменение  $R_v$  влияет только на поведение системы, не затрагивая работу ДРК;
- реализация системы управления движением может быть архитектурно разделена на два неза-

висимых уровня, и в рамках каждого из них могут быть применены различные подходы к решению. При этом важно, что задача управления движением подводного аппарата может быть полностью абстрагирована от структуры его ДРК, обеспечив единый и универсальный подход к разработке контура управления движением для произвольного типа ПА;

- ограничения, накладываемые на общую задачу оптимального управления (5), существенно усложняют её численное решение, особенно когда подмножество  $U$  является невыпуклым. При раздельном подходе можно решать задачу (6), условно считая задачу без ограничений, при этом накладывая ограничения только на более простую задачу (7), решение которой с учётом ограничений технически реализуемо современными вычислительными средствами в режиме реального времени;
- реализация раздельных уровней управления движением позволяет существенно упростить систему аккомодации за счет её переноса в область ответственности задачи распределения управляющих команд.

Отдельно стоит упомянуть случай при  $k - n < 0$  для системы (1). Такой случай подразумевает, что исполнительных механизмов ДРК меньше, чем размерность вектора состояния системы, такие системы можно назвать дефицитными (under-actuated system), а соответствующая ей матрица  $B_u$  является переопределённой или плохо обусловленной. В этом случае задача распределения управляющего воздействия тесно связана с системой управления движением ПА и её сложно сформулировать обособленно. Отдельные примеры решения этой задачи для различных типов АНПА представлены в литературе [19, 20], но этот класс задач не является предметом обсуждения данной статьи.

## 2. Описание ПА как объекта управления

### 2.1. Модель динамики подводного аппарата

Полную динамику подводного аппарата при  $n = 6$  в рамках изолированной задачи управления ПА по виртуальному вектору управления  $v$  можно описать следующей системой уравнений [21]:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = J(\eta)v, \\ M\dot{v} + C(v)v + D(v)v + g(\eta) = v. \end{cases}$$

В первом уравнении в качестве вектора состояния используется положение ПА в некото-

рой инерциальной системе координат (ИСК)  $\eta = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T \in \mathbb{R}^6$ , где первые три компоненты вектора определяют линейное смещение положения относительно начала отсчета, а вторая тройка определяет ориентацию тела, выраженную в углах Эйлера,  $v = [u, v, w, p, q, r]^T \in \mathbb{R}^6$  описывает движение АНПА в ССК, матрица  $J \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  определяет кинематические соотношения при переходе от ССК к ИСК.

Во втором уравнении в качестве вектора состояния используется скорость аппарата  $v$  в ССК,  $M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – матрица инерции НПА,  $C(v) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – матрица кориолисовых и центробежных сил,  $D(v) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – матрица гидродинамических сил и моментов, а  $g(\eta)$  – вектор гидростатических сил и моментов.

## 2.2. Модель исполнительных механизмов ДРК

Исполнительные элементы ДРК определяют эффективность траекторного маневрирования НПА, а также возможность его динамического позиционирования в точке или зависания в толще воды. На практике используются различные конструктивные схемы ДРК, в состав которых могут входить маршевые и подруливающие движители, носовые и кормовые рулевые устройства. Наиболее распространенными типами движителей являются гребные винты в насадке и водометные движители, которые могут устанавливаться стационарно на корпусе аппарата или на поворотных кронштейнах, которые поворачиваются на требуемый угол в плоскости или пространстве для изменения направления действия силы тяги. При этом использование водометных движителей ограничено их сравнительно низким КПД (0.5–0.55) по сравнению с гребными винтами, у которых он может достигать значений 0.7–0.75 [22–25]. Гораздо меньший КПД имеют такие экзотические движительные установки, как крыльчатые, волновые или машущие.

Рулевые устройства, использующие гидродинамические крылья в качестве исполнительного органа, как известно, имеют низкую эффективность при малых скоростях набегающего потока [23, 24]. При этом на крейсерских скоростях движения использование носовых и кормовых рулей направления и глубины имеет очевидное преимущество по сравнению с подруливающими движителями в части энергопотребления. Остановимся на традиционных исполнительных элементах ДРК многофункционального НПА, обеспечивающего выполнение обзорно-поисковых работ с движением в широком диапазоне скоростей хода и динамическое позиционирование в толще воды.

*Маршевые движители (МД).* Это один или несколько кормовых движителей, обеспечивающих

продольное движение аппарата, а также возможность маневрирования по глубине и курсу. Основные параметры статической характеристики гребного винта (ГВ) маршевого движителя соответствуют следующим соотношениям [24,25]:

$$\tau_{\text{мд}} = K_t(\lambda_p) \cdot \rho \cdot g \cdot n_s^2 \cdot D^4, \quad (8)$$

где  $\tau_{\text{мд}}$  – упор маршевого движителя, Н;  $K_t(\lambda_p)$  – безразмерные коэффициенты тяги и момента ГВ соответственно;  $\lambda_p = V(n_s \cdot D)^{-1}$  – относительная поступь ГВ;  $n_s$  – частота вращения ГВ, об/с;  $D$  – диаметр ГВ, м;  $V$  – скорость хода аппарата, м/с;  $\rho$  – массовая плотность воды, кг/м<sup>3</sup>;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

Управляющая сила, соответствующая упору маршевого движителя, может быть записана в следующем виде [7]:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{мд}} &= K_{\text{мд}} \cdot u_{\text{мд}}, \\ K_{\text{мд}} &= K_t(\lambda) \cdot \rho \cdot g \cdot D^4, \\ u_{\text{мд}} &= n_s |n_s|; \end{aligned} \quad (9)$$

где  $K_{\text{мд}}$  – коэффициент управляющей силы маршевого движителя,  $u_{\text{мд}}$  – управляющая команда маршевого движителя. При этом выбор команды управления МД  $u_{\text{мд}} = n_s |n_s|$  будет соответствовать частоте вращения движителя  $n_s = \text{sign}(u_{\text{мд}}) \sqrt{|u_{\text{мд}}|}$ .

*Подруливающие движители (ПД).* В составе ДРК подводных аппаратов, как правило, используются группы вертикальных и горизонтальных ПД, которые обеспечивают формирование управляющих сил и моментов при динамическом позиционировании аппарата в толще воды с компенсацией течения и других силовых и моментных возмущений. Тяговые характеристики ГВ ПД зависят от параметров поперечного набегающего потока, вызванного ходом аппарата, и определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{вд}} &= K_t^{\text{вд}}(V, v_k, \alpha) \cdot \rho \cdot g \cdot n_{\text{св}}^2 \cdot D^4, \\ \tau_{\text{гд}} &= K_t^{\text{гд}}(V, v_k, \beta) \cdot \rho \cdot g \cdot n_{\text{ст}}^2 \cdot D^4; \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\tau_{\text{вд}}, \tau_{\text{гд}}$  – упор вертикального и горизонтального ПД соответственно, Н;  $K_t^{\text{вд}}, K_t^{\text{гд}}$  – безразмерные коэффициенты ослабления тяги вертикального и горизонтального ПД в зависимости от результирующей скорости движения аппарата  $V$  соответственно;  $n_{\text{св}}, n_{\text{ст}}$  – частоты вращения ГВ ПД, об/с;  $v_k$  – скорость потока в канале ПД, м/с;  $\alpha, \beta$  – угол атаки и дрейфа соответственно.

По аналогии с (9) управляющие силы, соответствующие упорам подруливающих движителей, могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\tau_{\text{вд}} &= K_{\text{вд}} \cdot u_{\text{вд}}, \quad \tau_{\text{гд}} = K_{\text{гд}} \cdot u_{\text{гд}}; \\
K_{\text{вд}} &= K_t^{\text{вд}}(V, v_k, \alpha) \cdot \rho \cdot g \cdot D^4, \\
K_{\text{гд}} &= K_t^{\text{гд}}(V, v_k, \beta) \cdot \rho \cdot g \cdot D^4; \\
u_{\text{вд}} &= n_{\text{св}} |n_{\text{св}}|, \quad u_{\text{гд}} = n_{\text{ст}} |n_{\text{ст}}|,
\end{aligned} \quad (11)$$

где  $K_{\text{вд}}, K_{\text{гд}}$  – коэффициенты управляющих сил ПД,  $u_{\text{вд}}, u_{\text{гд}}$  – управляющие команды ПД.

*Рулевые устройства (РУ).* Традиционным конструктивным и эксплуатационным решением РУ является использование кормовых рулей и элеронов, хотя при малых скоростях движения находят применение и дополнительные рули глубины. Управляющие моменты рулей являются функцией угла перекладки и скорости набегающего потока, при этом дополнительные силы лобового сопротивления не учитываются при анализе управления. Модель РУ определяется следующими соотношениями [26]:

$$\begin{aligned}
M_x^{\text{py}} &= m_x^\delta \cdot \delta_\theta \frac{\rho V^2}{2} U, \quad M_y^{\text{py}} = m_y^\delta \cdot \delta_\phi \frac{\rho V^2}{2} U, \\
M_z^{\text{py}} &= m_z^\delta \cdot \delta_H \frac{\rho V^2}{2} U;
\end{aligned} \quad (12)$$

где  $M_x^{\text{py}}, M_y^{\text{py}}, M_z^{\text{py}}$  – управляющие моменты РУ по крену, курсу и дифференту соответственно;  $m_x^\delta, m_y^\delta, m_z^\delta$  – производные гидродинамических характеристик от перекладки рулей крена, направления и глубины соответственно;  $\delta_\theta, \delta_\phi, \delta_H$  – углы перекладки рулей крена, направления и глубины соответственно;  $U$  – водоизмещение аппарата,  $\text{м}^3$ .

Управляющие моменты РУ можно представить следующими функциями от углов перекладки:

$$\begin{aligned}
M_x^{\text{py}} &= K_x^{\text{py}} \cdot \delta_\theta, \quad M_y^{\text{py}} = K_y^{\text{py}} \cdot \delta_\phi, \quad M_z^{\text{py}} = K_z^{\text{py}} \cdot \delta_H; \\
K_x^{\text{py}} &= m_x^\delta \frac{\rho V^2}{2} U, \quad K_y^{\text{py}} = m_y^\delta \frac{\rho V^2}{2} U, \quad K_z^{\text{py}} = m_z^\delta \frac{\rho V^2}{2} U,
\end{aligned} \quad (13)$$

где  $K_x^{\text{py}}, K_y^{\text{py}}, K_z^{\text{py}}$  – коэффициенты управляющих моментов рулей крена, направления и глубины соответственно.

### 3. Описание движительно-рулевого комплекса НПА

Пусть движительно-рулевой комплекс подводного аппарата оснащён  $k$  движителями, тогда уравнение (4) для вектора виртуального управления  $v$  при  $n = 6$  может быть записано следующим образом [27]

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x^1 & C_x^2 & \dots & C_x^k \\ C_y^1 & C_y^2 & \dots & C_y^k \\ C_z^1 & C_z^2 & \dots & C_z^k \\ [C^1 \times P^1]_x & [C^2 \times P^2]_x & \dots & [C^k \times P^k]_x \\ [C^1 \times P^1]_y & [C^2 \times P^2]_y & \dots & [C^k \times P^k]_y \\ [C^1 \times P^1]_z & [C^2 \times P^2]_z & \dots & [C^k \times P^k]_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где  $C_j^i$  – проекция направляющего косинуса  $i$ -го движителя на  $j$ -ю ось ССК, а  $P^i$  – положение  $i$ -го движителя в ССК.

В случае если НПА оснащён, например, дополнительным рулём управления и поворотным движителем, которые оба обеспечивают вращение НПА в горизонтальной плоскости ССК, то в описание будут добавлены следующие столбцы:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \\ -P_z \sin(\alpha) \\ 0 \\ P_x \sin(\alpha) - P_y \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \quad (15)$$

Поворотный движитель
Руль управления

Для рулей управления удобно использовать в качестве команды управления ИМ создаваемый им момент в ССК, а затем по калибровочной характеристике переводить его значение в необходимое значение угла перекладки в зависимости от скорости набегающего потока НПА.

## 4. Методы решения задачи распределения управляющих воздействий

Существует достаточно много подходов к постановке и решению задачи распределения управляющих воздействий между ИМ ДРК. В рамках данного обзора они разделены на две большие группы. В первую группу отнесены те задачи, в которых вектор виртуального управления пропорционален вектору управления ИМ, то есть  $v(t) = Bu(t)$ , и это допущение было сделано в формулировке задачи распределения управляющими воздействиями. Но в то же время существует отдельная группа систем, где это допущение не может быть принято.

### 4.1. Линейные системы ИМ

В подавляющем большинстве случаев к этой группе относят практически все телеуправляемые

необитаемые подводные аппараты (ТНПА) с фиксированными двигателями, а также большую часть АНПА, оснащенных фиксированными двигателями и/или рулями управления. В статье [28] представлен обзор различных АНПА, разработанных до 2000 года за рубежом. Большинство представленных аппаратов оснащено одним или двумя маршевыми двигателями, которые работают совместно с рулями управления. К этой группе также могут быть отнесены такие аппараты, как МТ-2010 [29], ММТ-3000 [30] и другие аппараты, разработанные в Институте проблем морских технологий ДВО РАН.

Для линейных систем исполнительных механизмов исторически первыми появились статические модели, описывающие их поведение и соответствующие им статические методы оптимизации, но после 2000 года начали появляться исследования, в рамках которых учитывалась динамическая модель исполнительных механизмов при решении задачи оптимального распределения.

*Аналитическое решение при  $u \in \mathbb{R}^k$ .* Отдельным случаем является аналитическое решение задачи при отсутствии ограничений на управляющие команды, т.е.  $u \in \mathbb{R}^k$ . Такая ситуация отчасти является синтетической, но может быть к ней сведена подбором специальных контуров управления с затяжными переходными процессами. При отсутствии ограничений на команды управления оптимизационная задача может быть решена на основе метрики  $L_2$  (евклидова норма):

$$\min_{u \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} (u - u_p) W (u - u_p),$$

при  $v_c = Bu$ ,

где  $u_p$  – желаемое значение вектора управления ИМ в случае отсутствия управления, а  $W$  – диагональная матрица положительно определённых весовых коэффициентов.

Решение данной задачи может быть получено аналитическим образом и имеет следующий вид [31]:

$$u = (I - CB)u_p + Cv_c,$$

где  $I$  – единичная матрица, а  $C$  определяется следующим выражением:

$$C = W^{-1} B^T (B W^{-1} B^T)^{-1}.$$

Это решение возможно, только если матрица  $B$  является невырожденной, но зачастую это не так или она может стать вырожденной при отказах отдельных элементов двигатель-рулевого комплекса. В этом случае в практической реализации нормальной является практика записи матрицы  $C$  в следующей форме:

$$C_\varepsilon = W^{-1} B^T (B W^{-1} B^T + \varepsilon I)^{-1},$$

где  $\varepsilon \geq 0$  представляет собой бесконечно малую добавку, фактически не влияющую на решение задачи, но обеспечивающую существование обратной матрицы.

*Прямое распределение с масштабированием.* Данный подход не обеспечивает оптимального решения, но позволяет получить его в условиях линейных ограничений  $u \in U \subset \mathbb{R}^k$ , накладываемых на исполнительные механизмы. Данный метод подразумевает поиск такого набора линейных положительных сжимающих коэффициентов  $\alpha \in [0, 1]$ , при котором решение задачи распределения управляющего воздействия не выходит за рамки допустимого множества  $U$  [32], при этом новая линейная оптимизационная задача ставится следующим образом:

$$\max_{\alpha \leq 1} \alpha,$$

при условии  $Bu = \alpha v_c, \alpha v_c \in A$ .

Решение задачи поиска такого набора сжимающих коэффициентов встречается в зарубежной литературе [33, 34]. Кроме того, встречаются статьи, в которых рассматривается решение задачи оптимизационного поиска набора сжимающих коэффициентов [35].

Одна из вариаций данного подхода, которая используется в аппаратах Института проблем морских технологий ДВО РАН, формулируется следующим образом [36]. Пусть  $v_c^{prio}$  представляет собой команду управления  $v_c$ , в которой оси расставлены в соответствии с уменьшением степени приоритета,  $l = [l_1, l_2, \dots, l_m]$  где  $l_i \in [0, 1]$ , представляет собой набор коэффициентов насыщения  $i$ -й оси управления, а  $u^{ub}$  представляет собой решение задачи распределения без ограничений, полученное в соответствии с выражением (16). Тогда можно решить задачу распределения управляющих значений итерационным методом с фиксированным количеством шагов. Так, для оси с максимальным приоритетом, т.е. для  $v_c^1$  сжимающий коэффициент будет записан следующим образом:

$$\alpha_1 = \min \left\{ \left[ \frac{l_1 \cdot u_j^{\lim}}{u_j^{ub}} \right]^k \right\}_{j=1},$$

где  $u_j^{\lim}$  представляет собой максимальное значение команды управления  $j$ -го исполнительного механизма. Для простоты считаем, что характеристика исполнительного механизма симметрична, т.е.  $u_j^{\lim} = u_j^+ = -u_j^-$ .

Для осей с меньшим приоритетом, т.е. для  $i > 1$  в наборе  $v_c^{prio}$ , расчёт сжимающего коэффициента будет записан следующим образом:

$$\alpha_j = \min \left\{ \frac{\min(l_j \cdot u_j^{\text{lim}}, u_j^{\text{lim}} - u_j^{\text{prev}})}{u_j^{\text{ub}}} \right\}_{j=1}^k,$$

где  $u_j^{\text{prev}}$  представляет собой команду управления, которая была рассчитана для  $j$ -го исполнительного механизма на предыдущих итерациях алгоритма расчёта и определяется следующим образом:

$$u_j^{\text{prev}} = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k u_k^{\text{ub}}.$$

**Квадратичная оптимизация.** Выбор функционала  $J$  второго порядка в уравнении, описывающем управляемую систему (7), можно легко привести к записи задачи квадратичной оптимизации в канонической форме (метрика  $L_2$  или евклидова норма):

$$\min_{u,s} \frac{1}{2} (u^T, s^T) H \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix},$$

при условии

$$(B, -I) \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} = v_c,$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ s \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} u_{\min} \\ -u_{\max} \end{pmatrix},$$

где  $H = 2 \cdot \text{diag}(q_1, \dots, q_k, w_1, \dots, w_m)$  представляет собой диагональную матрицу положительно определённых весовых коэффициентов для ИМ ДРК ( $q_1, \dots, q_k$ ) и элементов вектора виртуального управления ( $w_1, \dots, w_m$ ).

В данной постановке задачи используются различные математические методы поиска решения, например, метод активного набора (active set) или метод внутренней точки (interior point). Оба метода использовались при решении задачи распределения для квадратичной формулировки проблемы [37, 38].

Функционал  $J$  может быть записан также и в  $L_1$  метрике, но особенностью методов линейного программирования при решении таких задач является поиск оптимального решения по граням и вершинам области допустимых значений границ подмножества  $U$ . Физический смысл этого заключается в тенденции максимальной загрузки минимального количества ИМ [39], что существенно повышает износ отдельных ИМ и ведёт к чрезмерной нагрузке на систему энергообеспечения. В то время как методы квадратичного программирования, в свою очередь, стремятся найти такое решение, которое распределяет равную нагрузку на максимальное количество элементов управления.

**Динамическое распределение.** Предыдущие формулировки задачи распределения вектора управления строились на базе статической модели ИМ и не учитывали динамических процессов, которые происходят в них. В работах [40, 41] были предложены первые попытки формулировки задачи распределения вектора управления с учетом динамики ИМ.

В работе [42] представлен новый подход для учета динамики исполнительных приводов. Его суть заключается в создании подпространств глобального пространства решения задачи распределения управляющих команд, которые отражают «виртуальную» динамику процессов, происходящих в исполнительных механизмах. Позже этот подход был развит в работах [43, 44].

В рамках нового подхода динамическая задача распределения управляющих воздействий (dynamic control allocation) приобрела новую формальную запись:

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \mu(t), \\ u(t) = B^+ v(t) + B_{\perp} \omega(t), \quad u_c(t) \equiv B^+ v(t); \end{cases} \quad (17)$$

где  $\omega(t) \in \mathbb{R}^{k-m}$  – вектор состояния распределителя (allocator state),  $\mu(t) \in \mathbb{R}^{k-m}$  – вход распределителя (allocator input),  $u_c(t)$  обозначается как первичный вектор управления ИМ,  $B^+$  – псевдообратная матрица к матрице  $B$ , а  $B_{\perp}$  представляет собой такую недоопределённую матрицу, множество решений которой формируют подпространство, ортогональное подпространству, сформированному множеством решений недоопределённой матрицы  $B$ . Такая запись позволяет получить произвольный вектор команд управления ИМ путем настройки  $\omega(t)$ .

Недостатком методов, представленных выше, является необходимость знания динамической модели исполнительных механизмов. Для решения этой проблемы в работе [45] авторами представлен новый подход, в котором параметры динамики ИМ определяются в режиме реального времени на основе методов обучения с подкреплением.

**Динамическое распределение на базе прогнозирующих моделей.** Управление с прогнозирующими моделями (Model predictive control) представляет собой один из самых современных подходов в области теории управления. Изначально он применялся при управлении производственными процессами, где большие постоянные времени переходных процессов позволяли его применять, т.к. он крайне ресурсоёмок. Но с ростом вычислительных мощностей компьютеров и встраиваемых систем появилась возможность применения данного подхода для мобильных объектов управления. В рамках этого подхода

сформировался отдельный подкласс под названием «Model predictive control allocation» [46–48] предназначенный для решения задачи распределения управляющих воздействий на основе прогнозирующих моделей.

Задача распределения в данном подходе записывается следующим образом [49]. Пусть исполнительные механизмы ДРК представлены в формулировках метода пространства состояний следующим образом:

$$\dot{u}(t) = A_u u(t) + B_u u_{cmd}(t),$$

где  $A$  и  $B$  блочно-диагональные матрицы, описывающие динамику исполнительных элементов,  $u_{cmd}(t)$  – вектор управления ИМ, а  $\dot{u}(t)$  – сформированное ИМ управление. Тогда постановка задачи распределения управления на базе прогнозирующей модели будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{u}(t) = A_u u(t) + B_u u_{cmd}(t),$$

при условии

$$v_c(t) = Bu(t), u \in U.$$

Для предсказания состояния на горизонт времени  $N$  набора исполнительных механизмов  $u(t)$  используется дискретная запись:

$$\hat{u} = [\hat{u}(k+1|k), \dots, \hat{u}(k+N|k)],$$

$$\hat{v} = [\hat{v}(k+1|k), \dots, \hat{v}(k+N|k)],$$

где  $N$  представляет собой размер горизонта предсказания, а  $k$  – текущий временной отрезок. Для заданного горизонта предсказания множество решений вектора управления ИМ ДРК  $u_{cmd}^*$  может быть найдено путем минимизации квадратичного функционала, который записан следующим образом:

$$J(\cdot) = \sum_{j=1}^N W(j) [\hat{v}(k+j|k) - v^*(k+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^k W_a(i) [u_{cmd,i}(k+j-1|k)]^2,$$

где  $W(j)$  представляет собой матрицу весовых коэффициентов, которая отражает значимость минимизации невязки с целевой командой управления  $v^*$  в момент времени  $j$ . В свою очередь, весовой коэффициент  $W_a(i)$  отражает стоимость использования  $i$ -го исполнительного механизма.

#### 4.2. Нелинейные системы ИМ

Существуют более сложные системы ДРК, так, в экспериментальном автономном подводном аппарате «KAUV-1» [50] маршевый движитель расположен на поворотной платформе, которая обеспечивает его вращение в горизонтальной плоскости ССК, в то вре-

мя как система изменяемого положения центра масс обеспечивает создание момента по каналу дифферента. Еще одним примером сложного движительно-рулевого комплекса является автономный подводный аппарат «Jinbei» [51], на котором установлена пара вращательных подруливающих движителей. Похожий автономный робототехнический комплекс под названием «Otohime» [52] также оснащен поворотными подруливающими движителями и был разработан той же группой японских ученых для решения задачи автоматического сбора грунта с морского дна.

Особенностью таких структур ДРК является наличие движителей, которые закреплены на поворотной платформе. Это ведёт к тому, что допущение  $v(t) = Bu(t)$  не может быть принято. Кроме того, в этом случае область решения является невыпуклой. Для такого класса задач подавляющая часть методов, описанных выше, не работает и требуются другие подходы.

*Методы нелинейного программирования.* В работах [53, 54] показано, что методы нелинейного программирования можно использовать для решения задачи распределения управляющих воздействий. Основным используемым подходом является локальная аппроксимация квадратичного функционала и линеаризация ограничений.

Это приводит к численному методу решения оптимизационной задачи, аналогичному последовательному квадратичному программированию (Sequential quadratic programming), за исключением того, что линейное либо квадратичное приближение необходимо выполнять для каждой итерации расчётов.

Недостатком такого подхода является то, что при высокой нелинейности исполнительных механизмов и сильной невыпуклости области решения данный метод может остаться в локальном экстремуме, не дойдя до глобального, что может существенно ухудшить качество управления.

*Динамический поиск оптимума.* В работе [55] автором предлагается переформулировать задачу поиска оптимального распределения управляющего воздействия как поиск управляющей функции Ляпунова. В частности, пусть задан функционал  $J'(x, u, t) = J(x, u, t) + \delta(u)$ , где  $\delta(u)$  представляет собой специальную штрафную функцию, которая удерживает  $u$  в рамках подпространства  $U$ . Тогда функция Ляпунова будет записана следующим образом:

$$L(x, u, t, \lambda) = J'(x, u, t) + \lambda^T (v_c - h(u, x, t)), \quad (18)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа. Пусть существует функция управления Ляпунова  $V_0(x, t)$  (Control-Lyapunov function), которая была сформирована системой



управления НПА, тогда задача оптимального распределения управляющего воздействия будет записана следующим образом:

$$V(x, u, t, \lambda) = \sigma V_0(x, t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial L^T}{\partial u} \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial L^T}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right),$$

где  $\sigma$  – некоторый множитель.

Этот подход был развит позже при решении задачи распределения управляющих воздействий для нелинейных ИМ с учетом их динамики [56].

### 5. Программные средства для решения задачи распределения управляющих воздействий

Для решения задачи квадратичной оптимизации во встраиваемых системах управления, применяемых в подводных аппаратах, желательно использовать легковесные библиотеки на языках программирования C++/C, которые позволяют решать оптимизационные задачи в режиме реального времени и легко встраиваемы в ПО аппарата.

Основные известные программные реализации с открытым исходным кодом, которые подходят для описываемой задачи, следующие:

- CVXGEN – реализация решения задачи квадратичной оптимизации на основе метода внутренней точки с автоматической генерацией C кода [57]. В работе [49] показано, что этот программный пакет может быть использован для решения задачи оптимального распределения в формулировках MPC подхода в режиме реального времени;
- qpOASES – реализация решения задачи квадратичной оптимизации на основе метода активных множеств на языке C++ [58];
- FiOrdOs – специальный программный модуль к MATLAB, который позволяет автоматически сформировать код для численного решения задачи квадратичной оптимизации с линейными ограничениями на языке C. Может быть использован для решения задачи оптимального распределения в формулировках MPC [59];
- ACADO – специальная программная среда и набор алгоритмов для решения задачи квадратичной оптимизации с ограничениями, динамической оптимизации, задачи MPC. В составе пакета есть специальные методы для автоматической генерации C кода [60];

- MPT (Multi-Parametric Toolbox) – специальный бесплатный пакет к MATLAB, включающий в себя реализацию оптимального управления линейными, гибридными и нелинейными системами. Могут быть заданы линейный и квадратичный функционалы качества. Есть автоматическая генерация кода на языке C [61].

## Заключение

Задачу управления движением подводного аппарата можно ставить различными способами. Один из них заключается в разделении задачи на две независимых, которые решаются последовательно: управление движением НПА и управление исполнительными механизмами. В статье показано, что при такой декомпозиции управления оптимальность решения сохраняется. Приведены различные подходы и методы решения задачи распределения управляющих воздействий в зависимости от типа используемого ДРК. Кроме того, представлены программные пакеты, которые позволяют реализовать рассмотренные подходы в компьютерах и встраиваемых системах.

Описываемая задача представляется достаточно проработанной, но в тоже время существует большой пласт особенностей динамики ИМ, которые до сих пор не учтены в представленных подходах:

- При формировании динамических моделей исполнительных механизмов явным образом не выражены параметры электроприводов. В работах не учитывается, что коэффициент полезного действия электродвигателя существенно зависит от скорости вращения вала привода.
- Динамическая модель не учитывает сильную зависимость параметров исполнительных механизмов от скорости набегающего потока, хотя это важный параметр для работы всех исполнительных механизмов. Так, в работе [62] показано, что из-за гидродинамических особенностей эффективность ПА существенно падает с возрастанием скорости набегающего потока и изменением его угла набегания.

Такие задачи, как и многие другие в этой области, требуют дальнейшего детального рассмотрения.

Работа выполнена по теме госзадания ИПМТ ДВО РАН «Научные исследования и разработки в области новых технологий создания перспективных морских робототехнических комплексов ...», № госрегистрации АААА-А17-117013010055-6.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Valasek M. Design and control of under-actuated and over-actuated mechanical systems—challenges of mechanics and mechatronics // *Computational mechanics in vehicle system dynamics—proceedings of 5th world congress on computational mechanics held in Vienna*. Vienna, 2002.
2. Бриллиантов А.Н. Разработка и исследование основ построения энергетических систем подводных аппаратов: канд. дис. по техн. наукам / Ин-т океанологии им. П.П. Ширшова. М., 2005. С. 68–70.
3. Enns D. Control allocation approaches // *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 1998. P. 4109.
4. Durham W.C. Constrained control allocation // *Journal of Guidance, control and Dynamics*. 1993. No. 16(4). P. 717–725.
5. Craig J.J. Introduction to robotics: mechanics and control. 3rd ed. Upper Saddle River: Upper Saddle River, 2005. 407 p.
6. Bordignon K.A. Constrained control allocation for systems with redundant control effectors: дис. – Virginia Tech, 1996.
7. Fossen T.I., Johansen T.A. A survey of control allocation methods for ships and underwater vehicles // *14th Mediterranean conference on control and automation*. – IEEE, Ancona, 2006. P. 1–6.
8. Oppenheimer M., Doman D., Bolender M. Control allocation // *The control handbook, control system applications* / Ed. by Levine. W.S. 2010.
9. Durham W., Bordignon K.A., Beck R. Aircraft control allocation. John Wiley & Sons, 2017.
10. Johansen T.A., Fossen T.I. Control allocation – a survey // *Automatica*. 2013. No. 49(5). P. 1087–1103.
11. Филаретов В.Ф., Юхимец Д.А. Особенности синтеза высокоточных систем управления скоростным движением и стабилизацией подводных аппаратов в пространстве / под ред. В.Ф.Филаретова. Владивосток: Дальнаука, 2018, 400 с.
12. Мартынова Л.А., Розенгауз М.Б. Подход к реконфигурации системы управления движением автономного необитаемого подводного аппарата // *Гироскопия и навигация*. 2020. № 28(2). С. 131–146.
13. Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Кульчак А.М. Аналитическое решение задачи оптимальной реконфигурации системы управления летательного аппарата при отказе нескольких органов управления // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2014. № 7. С. 59–66.
14. Амбросовский В.М., Корнев А.С., Хабаров С.П. Распределение упоров в задаче позиционирования подвижных объектов // *Изв. СПбГЭТУ ЛЭТИ*. 2013. № 7. С. 63.
15. Воловодов С.К., Черняев М.Г., Каверинский А.Ю., Воловодов С.С. Распределение ресурсов управления при пространственной стабилизации подвижных объектов // *Гироскопия и навигация*. 2003. № 1. С. 30–42.
16. Амбросовский В.М., Корнев А.С. Алгоритмы управления в задачах позиционирования динамических объектов // XII Всерос. совещ. по проблемам управления. ВСПУ-2014. М., 2014. С. 3523–3533.
17. Власов С.М. Адаптивное управление плоским движением надводного роботизированного объекта С.-Петерб. нац. исслед. ун-т информатик. технологий, механики и оптики. 2016.
18. Härkegård O., Glad S.T. Resolving actuator redundancy—optimal control vs. control allocation // *Automatica*. 2005. No. 41(1). P. 137–144.
19. Bi F.Y., Wei Y.J., Zhang J.Z., Cao W. Position-tracking control of underactuated autonomous underwater vehicles in the presence of unknown ocean currents // *IET control theory & applications*. 2010. No. 4(11). P. 2369–2380.
20. Do K.D., Jiang Z.P., Pan J., Nijmeijer H. Global output feedback universal controller for stabilization and tracking of underactuated ODIN—an underwater vehicle // *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. 2002. Vol. 1. P. 504–509.
21. Fossen T.I. Marine Control Systems—Guidance, Navigation, and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles. Marine Cybernetics. Trondheim, Norway, Org, 2002.
22. Артюшков Л.С., Ачкинадзе А.Ш., Русецкий А.А. Судовые двигатели. Л.: Судостроение, 1988.
23. Агеев М.Д., Киселев Л.В., Матвиенко Ю.В. и др. Автономные подводные роботы: системы и технологии. М.: Наука, 2005. 400 с.
24. Пантов Е.Н., Махин Н.Н., Шереметов Б.Б. Основы теории движения подводных аппаратов. Л.: Судостроение, 1973. 216 с.
25. Инзарцев А.В., Киселев Л.В., Костенко В.В., Матвиенко Ю.В., Павин А.М., Щербатюк А.Ф. Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение. Владивосток: Дальнаука, 2018. 368 с.
26. Боженков Ю.А., Борков А.П., Гаврилов В.М. и др. Самоходные необитаемые подводные аппараты. Л.: Судостроение, 1986. 264 с.
27. Армишев С.В. Исследование структуры двигательных комплексов подводных аппаратов // *Подводные аппараты и роботы*. М., 1986. С. 45–52.
28. Yuh J. Design and control of autonomous underwater robots: A survey // *Autonomous Robots*. 2000. No. 8(1). P. 7–24.
29. Борейко А.А., Горнак В.Е., Мальцева С.В., Матвиенко Ю.В., Михайлов Д.Н. Малогабаритный многофункциональный автономный необитаемый подводный аппарат «МТ-2010» // *Подводные исследования и робототехника*. 2011. № 2. С. 37–42.
30. Горнак В.Е., Инзарцев А.В., Львов О.Ю., Матвиенко Ю.В., Щербатюк А.Ф., Инзарцев А.В. ММТ-3000 – новый малогабаритный автономный необитаемый подводный аппарат Института проблем морских технологий ДВО РАН // *Подводные исследования и робототехника*. 2007. № 1. С. 12–20.
31. Fossen T.I., Sagatun S.I. Adaptive control of nonlinear systems: A case study of underwater robotic systems // *Journal of Robotic Systems*. 1991. No. 8(3). P. 393–412.
32. DURHAM W.C. Constrained control allocation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1994. No. 17(2). P. 330–336.
33. Bordignon K.A., Durham W.C. Closed-form solutions to constrained control allocation problem // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995. Vol. 18, No. 5. P. 1000–1007.
34. Petersen J.A., Bodson M. Fast implementation of direct allocation with extension to coplanar controls // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2002. Vol. 25. P. 464–473.
35. Oppenheimer M., Doman D., Bolender M. Control allocation // *The control handbook, control system applications*. 2010.
36. Костенко В.В., Павин А.М. К вопросу обеспечения независимости управляющих воздействий двигательного комплекса подводного аппарата // *Материалы 6-й научно-технической конференции «Технические проблемы освоения мирового океана»*. Владивосток, 2015. С. 118–123.
37. Petersen J.A., Bodson M. Constrained quadratic programming techniques for control allocation // *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*. Maui, HI, 2003. Vol. 4. P. 3378–3383.
38. Harkegard O. Efficient active set algorithms for solving constrained least squares problems in aircraft control allocation // *Proceedings of the 41st IEEE Conf. on Decision and Control*. Las Vegas, NV, USA, 2002. P. 1295–1300.
39. Bodson M. Evaluation of optimization methods for control allocation // *Journal of Guidance Control, and Dynamics*. 2002. No. 25. P. 703–711.
40. Härkegård O. Dynamic control allocation using constrained quadratic programming // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2004. No. 27(6). P. 1028–1034.
41. Tjønnås J., Johansen T.A. Adaptive control allocation // *Automatica*. 2008. No. 44(11). P. 2754–2765.
42. Zaccarian L. Dynamic allocation for input redundant control systems // *Automatica*. 2009. No. 45(6). P. 1431–1438.

43. Galeani S., Serrani A., Varano G., Zaccarian L. On input allocation-based regulation for linear over-actuated systems // *Automatica*. 2015. No. 52. P. 346–354.
44. Serrani A. Output regulation for over-actuated linear systems via inverse model allocation // *IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Hawaii, 2012. P. 4871–4876.
45. Kolaric P., Lopez V.G., Lewis F.L. Optimal dynamic Control Allocation with guaranteed constraints and online Reinforcement Learning // *Automatica*. 2020. No. 122.
46. Schwartz M., Siebenrock F., Hohmann S. Model Predictive Control Allocation of an Over-actuated Electric Vehicle with Single Wheel Actuators // *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Vol. 52, No. 8. P. 162–169.
47. Bächle T., Graichen K., Buchholz M., Dietmayer K. Model predictive control allocation in electric vehicle drive trains // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. No. 48(15). P. 335–340.
48. Naderi M., Sedigh A.K., Johansen T.A. Guaranteed feasible control allocation using model predictive control // *Control Theory and Technology*. 2019. No. 17(3). P. 252–264.
49. Hanger M., Johansen T.A., Mykland G.K., Skullestad. A. Dynamic model predictive control allocation using CVXGEN // *9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*. Santiago, 2011. P. 417–422.
50. Loc M.B., Choi H.S., Seo J.M., Baek S.H., Kim A.J.Y. Development and control of a new AUV platform // *International Journal of Control, Automation and Systems*. 2014. No. 12(4). P. 886–894.
51. Yoshida H. et al. Development of the cruising-AUV “Jinbei” // *Oceans-Yeosu*. – IEEE, 2012. P. 1–4.
52. Ishibashi S. et al. The development of an autonomous underwater vehicle «Otohime» with the multiple operation, 2013. *IEEE Intern. Conf. on Mechatronics and Automation*. Takamatsu, Japan, 2013. P. 1588–1593.
53. Johansen T.A., Fossen T.I., Berge S.P. Constrained nonlinear control allocation with singularity avoidance using sequential quadratic programming // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2004. No. 12(1). P. 211–216.
54. Poonamallee V.L., Yurkovich S., Serrani A., Doman. D.B. A nonlinear programming approach for control allocation // *Proceedings of the American control conference*. Boston, 2004. Vol. 2. P. 1689–1694.
55. Johansen T.A. Optimizing nonlinear control allocation // *43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Bahamas, 2004. Vol. 4. P. 3435–3440.
56. Tjonnas J., Johansen T.A. Optimizing adaptive control allocation with actuator dynamics // *46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, 2007. P. 3780–3785.
57. Mattingley J., Boyd S. Real-Time Convex Optimization in Signal Processing // *IEEE Signal Processing Magazine*. 2010. Vol. 27, No. 3. P. 50–61.
58. Ferreau H.J., Kirches C., Potschka A., Bock H.G., Diehl M. qpOASES: A parametric active-set algorithm for quadratic programming // *Mathematical Programming Computation*. 2014. No. 6(4). P. 327–363.
59. Jones C.N., Domahidi A., Morari M., Richter S., Ullmann F., Zeilinger. M. Fast predictive control: Real-time computation and certification // *IFAC Proceedings Volumes*. 2012. No. 45(17). P. 94–98.
60. Houska B., Ferreau H.J., Diehl M. ACADO toolkit—An open-source framework for automatic control and dynamic optimization // *Optimal Control Applications and Methods* 2011. No. 32(3). P. 298–312.
61. Kvasnica M., Grieder P., Baotic M., Morari M. Multi-parametric toolbox (MPT) // *International workshop on hybrid systems: Computation and control*. San Francisco, 2004. P. 448–462.
62. Palmer A., Hearn G.E., Stevenson P. Modelling tunnel thrusters for autonomous underwater vehicles // *IFAC Proceedings Volumes*. 2008. No. 41(1). P. 91–96.x.

## Об авторах

**КОСТЕНКО Владимир Владимирович**, к.т.н., заведующий лабораторией исполнительных устройств и систем телеуправления, ведущий научный сотрудник  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем морских технологий ДВО РАН  
**Адрес:** 690091, Владивосток, ул. Суханова, 5а  
**Научные интересы:** Подводная робототехника, системы управления движением, движительно-рулевые комплексы, динамические модели, буксируемые системы.  
**Тел.:** +7 (984) 145-43-85  
**E-mail:** kostenko@marine.febras.ru, kosten.ko@mail.ru  
**SPIN-код:** 2310-3141  
**ORCID ID:** 0000-0002-3821-3787  
**Resercher ID:** AAF-6399-2021  
**Scopus ID:** 57189036440

**ТОЛСТОНОГОВ Антон Юрьевич**, научный сотрудник  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем морских технологий ДВО РАН  
**Адрес:** 690091, Владивосток, ул. Суханова, 5а  
**Научные интересы:** теория и практика создания систем управления движением автономных, телеуправляемых и гибридных подводных роботов  
**Тел.:** +7 (950) 282-51-56  
**E-mail:** tolstonogov.anton@gmail.com  
**SPIN-код:** 7409-7896  
**ORCID ID:** 0000-0002-2839-2267  
**Resercher ID:** AAF-8216-2021  
**Scopus ID:** 57105049900

### Для цитирования:

Костенко В.В., Толстоногов А.Ю. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ПОДВОДНОГО АППАРАТА: КРАТКИЙ ОБЗОР. Подводные исследования и робототехника. 2021. №. 1(35). С. 4–17. DOI: 10.37102/1992-4429\_2021\_35\_01\_01