

О ВОЗМУЩЕНИИ АКУСТИЧЕСКИХ МОД НЕОДНОРОДНОСТЯМИ БАТИМЕТРИИ В МЕЛКОМ МОРЕ

А.Д. Захаренко, П.С. Петров,
М.Ю. Трофимов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Тихоокеанский океанологический институт
имени В.И. Ильичева ДВО РАН¹

Моделирование распространения звука в акустике океана может выполняться с использованием теории нормальных волн. При наличии в решаемой задаче неоднородностей батиметрии большая часть вычислительного времени тратится при этом на расчет модовых функций и волновых чисел в нескольких поперечных сечениях исследуемого волновода. Значительную часть этого времени можно сэкономить, используя для расчета указанных величин теорию возмущений. В работе строится теория возмущений решения задачи Штурма–Лиувилля для модовых функций и волновых чисел, вызванных вариациями глубины моря. Данный вопрос может быть сведен к классической задаче о возмущении потенциала в стационарном уравнении Шредингера путем определенной замены переменных. В работе в явном виде приводятся формулы теории возмущений первого и второго порядков для модовых функций и волновых чисел. Представлен пример использования этих формул и выполнен анализ их точности. Описанный подход позволяет значительно повысить вычислительную эффективность моделирования распространения звука в нерегулярных волноводах мелкого моря при сохранении того же уровня точности, что достигается при отдельном решении задачи Штурма–Лиувилля в каждом поперечном сечении.

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассматриваем задачу о распространении звука в мелководном волноводе с нерегулярной батиметрией в рамках теории нормальных волн [1, 2]. Для решения такой задачи обычно приходится вычислять моды и соответствующие им горизонтальные волновые числа в многочисленных поперечных сечениях вдоль интересующего нас волновода путем решения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля [1]. Количество вызовов солвера такой задачи можно значительно сократить, решив спектральную задачу один или несколько раз на некоторых средних глубинах и используя далее асимптотические формулы теории возмущения для волновых чисел и модовых функций на остальном диапазоне значений глубины моря.

Наличие границы раздела между водной и донной средами в задачах акустики океана и тот факт, что ее нерегулярность вносит существенный вклад в изменение свойств волновода, не позволяют прямо воспользоваться хорошо известными результатами теории задач Штурма–Лиувилля или стандартным применением теории возмущений. Более того, ска-

лярное произведение, связанное со спектральной задачей, содержит профиль плотности $\rho = \rho(z)$ в качестве весовой функции, и, следовательно, это произведение также может изменяться вдоль волновода [1]. Напротив, в задачах возмущения потенциала в квантовой механике скалярное произведение всегда представляет собой обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве интегрируемых с квадратом функций. Сложность, связанная с изменением весовой функции в скалярном произведении вдоль волновода, не позволяет сразу свести возмущение акустических мод вариациями батиметрии к обычной задаче потенциального возмущения в квантовой механике [3].

Основными результатами нашей работы являются формулы первого и второго порядков для возмущения модальных волновых чисел и собственных функций, вызванного изменением глубины воды в мелководном волноводе. Мы также показываем, как эти формулы могут быть использованы для повышения эффективности расчета акустического поля.

¹ 690041, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43. Тел.: +7 (423) 231-14-00.
E-mail: petrov@poi.dvo.ru

1. Адиабатические нормальные моды в волноводе переменной глубины

Акустическое поле, создаваемое гармоническим по времени точечным источником в мелководной среде, может быть вычислено как суперпозиция локальных акустических мод по формуле [1]:

$$P(r, z) = \sum_{j=1}^{N_m} C_j \frac{\phi_j(z, r)}{\sqrt{rk_j(r)}} e^{i \int_0^r k_j(r) dr}, \quad (1)$$

где $C_j = \frac{ie^{i\pi/4} \phi_j(z_s, 0)}{\rho(z_s) \sqrt{8\pi}}$, а $k_j(r)$ и $\phi_j(z, r)$ – горизонтальные волновые числа и собственные функции спектральной задачи:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi_j}{dz^2} + \frac{\omega^2}{(c(z))^2} \phi_j = k_j^2 \phi_j, \\ z \in (0, h) \cup (h, H], \\ \phi_j|_{z=0} = 0, \\ \phi_j|_{z=H} = 0, \\ \phi_j|_{z=h^-} = \phi_j|_{z=h^+}, \\ \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\phi_j}{dz} \right|_{z=h^-} = \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\phi_j}{dz} \right|_{z=h^+}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь ω – круговая частота, $c(z)$ – профиль скорости звука, который мы полагаем зависящим от вертикальной координаты z и постоянным вдоль r , $h(r)$ – граница между водным слоем и донным, H – постоянная глубина расчетной области.

Отметим, что для расчета поля по формуле (1) необходимо знать $k_j(r)$ и $\phi_j(z, r)$ для всех значений r (или для всех значений $h(r)$ вдоль рассматриваемой акустической трассы), что требует решения задачи (2) с некоторым достаточно малым по r шагом. С другой стороны, мы можем рассматривать вариации глубины воды как возмущение относительно некоторого среднего значения h_0 , а горизонтальные волновые числа и модовые функции приближать отрезками рядов Тейлора:

$$k_j(r) \sim k_{j,0} + k'_{j,0} \Delta h(r) + \frac{1}{2} k''_{j,0} (\Delta h(r))^2, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi_j(z, r) \sim \phi_{j,0}(z) + \phi'_{j,0}(z) \Delta h(r) + \\ + \frac{1}{2} \phi''_{j,0}(z) (\Delta h(r))^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где штрих обозначает производную по h .

2. Возмущение акустических мод вариациями батиметрии

Задача о возмущении интерфейса может быть сведена к хорошо изученной проблеме потенциального возмущения в стационарном уравнении Шредингера [3]. Введем новую переменную $t = zh_0 / h$ и обозначим $T = Hh_0 / h$. После подстановки в формулу (2) получаем следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_j}{dt^2} + \frac{h^2 \omega^2}{h_0^2 (\bar{c}(t))^2} \psi_j = \frac{h^2}{h_0^2} k_j^2 \psi_j, \\ \psi_j|_{t=0} = 0, \\ \psi_j|_{t=T} = 0, \\ \psi_j|_{t=h_0^-} = \psi_j|_{t=h_0^+}, \\ \left. \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\psi_j}{dt} \right|_{t=h_0^-} = \left. \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\psi_j}{dt} \right|_{t=h_0^+}, \end{cases} \quad (5)$$

где k_j – горизонтальные волновые числа задачи (2), а собственные функции $\psi_j(t)$ связаны с собственными функциями задачи (2) соотношением

$$\phi_j(z) = \sqrt{\frac{h_0}{h}} \psi_j(t). \text{ Обозначая } \varepsilon = \Delta h / h_0 = (h - h_0) / h_0$$

и $Q = \frac{\omega^2}{c^2}$, мы вводим следующие разложения:

$$h = h_0 (1 + \varepsilon), \quad T = \frac{Hh_0}{h} = H \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \right),$$

$$k_j = k_j^{(0)} + \varepsilon k_j^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2} k_j^{(2)} + \dots, \quad (6)$$

$$\psi_j = \psi_j^{(0)} + \varepsilon \psi_j^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2} \psi_j^{(2)} + \dots$$

$$Q(z) = Q(t) + \varepsilon t Q'(t) + \varepsilon^2 \frac{t^2 Q''(t)}{2!} + o(\varepsilon^2). \quad (7)$$

Подставим эти разложения в задачу (5) и, следуя стандартной схеме теории возмущений, соберем члены с одинаковыми степенями ε в первом уравнении (5). Скалярное произведение уравнения, полученного при ε_1 и невозмущенной функции $\psi_j^{(0)}$ дает нам следующее выражение для первой производной волнового числа:

$$\begin{aligned} k_j^{(1)} = -k_j^{(0)} + \frac{1}{k_j^{(0)}} \int_0^H Q(t) \frac{(\psi_j^{(0)}(t))^2}{\rho(t)} dt + \\ + \frac{1}{2k_j^{(0)}} \int_0^H t Q'(t) \frac{(\psi_j^{(0)}(t))^2}{\rho(t)} dt + \frac{B_{jj}}{2k_j^{(0)}}, \end{aligned} \quad (8)$$

а скалярное произведение того же уравнения и функции $\Psi_i^{(0)}$ – выражение для первой производной собственной функции:

$$\Psi_j^{(1)} = \sum_{i \neq j} \frac{V_{ji}}{(k_j^{(0)})^2 - (k_i^{(0)})^2} \Psi_i^{(0)}, \quad (9)$$

$$V_{ji} = 2 \int_0^H Q \frac{\Psi_i^{(0)} \Psi_j^{(0)}}{\rho(t)} dt + \int_0^H t Q' \frac{\Psi_i^{(0)} \Psi_j^{(0)}}{\rho(t)} dt - B_{ji}.$$

Члены:

$$B_{ji} = - \left(\frac{H}{\rho(t)} \frac{d\Psi_j^{(0)}}{dt} \frac{d\Psi_i^{(0)}}{dt} \right) \Bigg|_{t=H} \quad (10)$$

возникают из-за возмущения в новых переменных границы H и равны нулю для водных мод. Функции $\Psi^{(1)}$ по построению являются производными $\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = h_0 \frac{\partial \Psi}{\partial h}$. Следовательно, производные волновых чисел и собственных функций исходной спектральной задачи (2) могут быть найдены как

$$\left. \frac{\partial k_j}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \frac{1}{h_0} k_j^{(1)}, \quad \left. \frac{\partial \phi_j}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \frac{1}{h_0} \left(-\frac{\Psi_j^{(0)}}{2} - t \frac{\partial \Psi_j^{(0)}}{\partial t} + \Psi_j^{(1)} \right) \Bigg|_{t=z}. \quad (11)$$

Аналогичным образом, вычислив скалярные произведения уравнения при ε^2 с функциями $\Psi_j^{(0)}$ и $\Psi_i^{(0)}$, можно получить выражения для вторых производных волнового числа и модовой функции по h .

3. Численный пример

В этом разделе мы рассмотрим численный пример, дающий представление о точности аппроксимаций волновых чисел и модовых функций соответствующими рядами Тейлора (3) и (4), включающими первую и вторую производные, схема вычисления которых методом теории возмущения описана в предыдущем разделе.

В этом примере мы рассматриваем водный слой $0 \leq z \leq h$ с постоянной скоростью звука $c_w = 1500$ м/с и плотностью $p_w = 1$ г/см³, лежащий на жидком дне $h \leq z \leq H$, где соответствующие значения параметров среды равны $c_b = 2000$ м/с, $p_b = 2$ г/см³. Частота звука $f = 100$ Гц, и мы рассматриваем возмущение границы, расположенной на глубине $h_0 = 50$ м.

На рис. 1 представлены результаты расчетов для волновых чисел. Сплошная линия – результат многократного решения спектральной задачи (2), штриховая и штрих-пунктирная кривые получены соответственно в результате однократного решения спектральной задачи (2) и приближения рядом (3) с учетом соответственно первой производной, найденной по формуле (11), а также первой и второй производных.

На рис. 2 представлены результаты расчета модовых функций. Сплошными линиями изображены первая и четвертая моды, полученные в результате решения спектральной задачи (2) в случае, когда возмущение границы $\Delta h = -5$ м. Штриховыми линиями обозначены аппроксимации этих функций рядом (4) с учетом только первой производной, а штрих-пунктирными с точкой линиями – аппроксимации рядом (4) с учетом первой и второй производной. Пунктир-

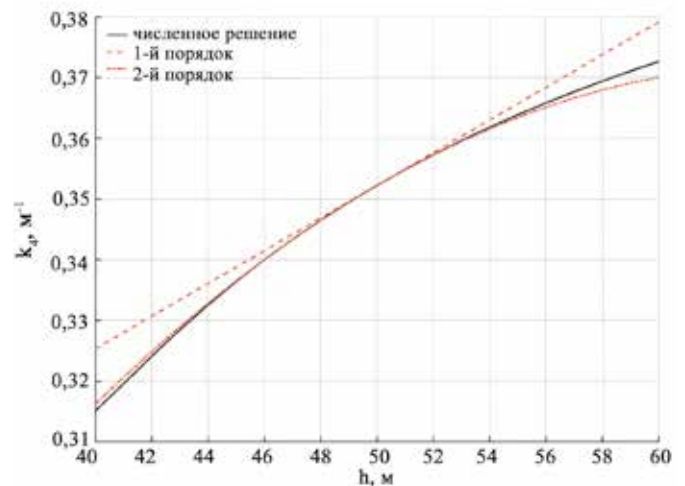
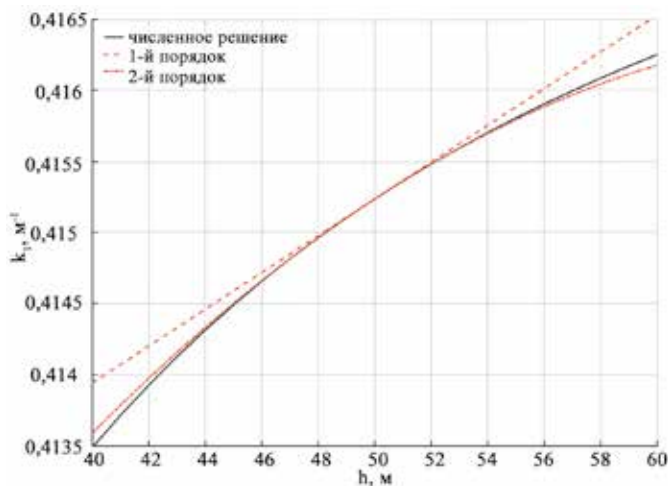


Рис. 1. Зависимость волновых чисел k_p и k_s от глубины h (сплошная линия) и аппроксимация этих функций рядом (3) с учетом двух членов (штриховая линия) и трех членов (штрих-пунктирная линия)

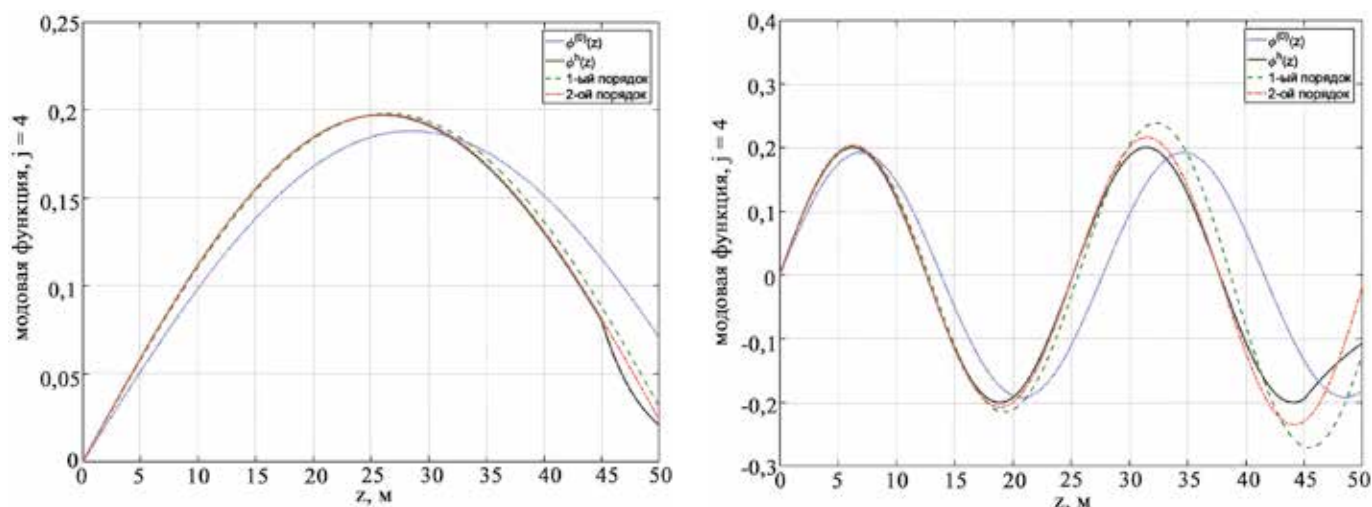


Рис. 2. Аппроксимация модовых функций (сплошная линия) рядом (4) с учетом двух членов (штриховая линия) и трех членов (штрихпунктирная линия)

ной линией изображены модовые функции, полученные в результате решения спектральной задачи (2) без возмущения ($\Delta h = 0$) для представления о том, насколько существенно влияние батиметрии на решение спектральной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена методика ускоренного расчета волновых чисел и модовых функций в волноводе мелкого моря с нерегулярной батиметрией, основанная на теории возмущений, развитой для задачи

Штурма–Лиувилля для акустических мод. Эта методика может быть использована для повышения эффективности моделирования двумерных и трехмерных акустических полей в нерегулярных волноводах при использовании математических методов, основанных на модовом представлении поля (например, при использовании метода параболического уравнения).

Работа выполнена в рамках темы госзадания ГОИ ДВО РАН “Математическое моделирование и анализ динамических процессов в океане” (№ 0271-2019-0001) и поддержана грантами РФФИ 18-05-00057_а и 18-35-20081_мол_а_вед.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jensen F., Kuperman W., Porter M., Schmidt H. Computational ocean acoustics. New-York: Springer, 2011. 772 p.
2. Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J. Fundamentals of shallow water acoustics. New-York: Springer, 2012. 540 p.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). 4-е изд., испр. М.: Наука, 1989. 768 с.

