

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УКЛАДКИ РАСТЯЖИМОГО КАБЕЛЯ НА ДНО МОРЯ С ДВИЖУЩЕГОСЯ СУДНА С УЧЕТОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОДЫ

**И.А. Керестень, А.А. Михайлов,
И.Б. Войнов, А.И. Боровков**

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого¹

Статья посвящена численному моделированию укладки кабеля на дно моря в постановке задачи, известной как задача Рауса–Аппеля. Целью работы является определение формы и натяжения кабеля при его укладке под водой на постоянную глубину. Рассматривается установившееся движение кабеля при его сматывании с катушки, установленной на движущемся с постоянной скоростью судне. В качестве модели кабеля рассматривается математическая модель абсолютно гибкой растяжимой однородной нити. Основными задачами работы являются: вывод дифференциальных уравнений установившегося движения кабеля с учетом влияния растяжимости на погонный вес и гидродинамических сил сопротивления воды; разработка численной модели укладки кабеля и выполнение серии расчетов по определению формы провисающей части кабеля и его натяжения при различных параметрах укладки кабеля. Результаты моделирования представлены в безразмерном виде для удобства их использования при анализе различных глубин укладки кабеля. Проведена верификация разработанной модели на примере нерастяжимого кабеля. Результаты хорошо совпадают с аналитическим решением Меркина. Проанализировано влияние скорости движения судна и параметров кабеля на исследуемые характеристики. Рассмотрено влияние подводного течения вблизи газового месторождения Ормен Ланге. Представленную модель и результаты моделирования укладки кабеля можно использовать для инженерной оценки прочности кабеля в рамках рассмотренной постановки задачи и принятых допущений.

ВВЕДЕНИЕ

Впервые задачу об определении формы кабеля при его укладке под водой на постоянную глубину рассмотрел Э. Раус в 1860 году [1]. В работе рассматривается поведение кабеля с учетом гидродинамических сил сопротивления, линейно пропорциональных скорости, при сматывании с катушки, движущейся со скоростью, совпадающей со скоростью схода кабеля. Полное аналитическое решение этой задачи получено П. Аппелем в 1893 году [2], а в 1941 году А.П. Минаковым дополнено учетом растяжимости кабеля согласно закону Гука [3].

Опубликованные И.Р. Матросовым и С.Н. Чубаровым в 1961–1962 годах результаты испытаний по продувке канатов в аэродинамической лаборатории Ленинградского университета [4, 5] подтвердили предложенную А.Н. Крыловым в 1909 году [6] модель

нормального гидродинамического сопротивления, квадратично пропорциональную скорости.

В 1966–1970 годах Н.И. Алексеев пересмотрел аналитическое решение А.П. Минакова с учетом экспериментально подтвержденной модели гидродинамической силы сопротивления [7, 8]. В 1980 году Д.Р. Меркин, вслед за Н.И. Алексеевым, представил аналитическое решение этой задачи в виде зависимостей натяжения кабеля, проекций провисающей части кабеля и длины провисающей части кабеля от угла с горизонтом для математической модели абсолютно гибкой нерастяжимой однородной нити [9].

Работа Ч. Парка и Н. Кима 2015 года посвящена моделированию динамики автономного полупогруж-

¹ 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29. Тел.: +7 (921) 9239605; факс: +7 (812) 5527778. E-mail: keresten@compmechlab.com; michailov@compmechlab.com; voynov@compmechlab.com; vicerektor.ap@spbstu.ru

ного подводного аппарата, буксируемого кабелем [10]. Рассматриваемый подводный аппарат, буксируемый кабелем, предназначен для разведки или поиска шахт. Буксируемый кабель моделируется с использованием формулировки полных узловых координат. При моделировании динамики учитываются гидродинамические силы сопротивления и влияние присоединенной массы воды.

Работы Ж. Рена, Р. Скжетне и др. 2015–2016 гг. посвящены проблемам швартования плавающих морских сооружений [11–14]. В статье [11] представлены определяющие уравнения алгоритма оценки профиля течения воды, зависящего от глубины, основанные на данных измерений датчиков линий швартования. В статье [12] предложен подход к определению месторасположения плавающего сооружения, основанный только на данных измерений натяжения линий швартования. В статье [13] этот подход расширен неопределенным расположением якорей и оценкой их расположений. В статье [14] предложена отказоустойчивая схема диспетчерского контроля, позволяющая обнаруживать обрывы линий швартования, основываясь только на данных измерений местоположения судна.

Работа М. Ву и др. 2017 года посвящена исследованию парящего движения подводного аппарата, буксируемого кабелем [15]. Представлены определяющие уравнения динамики совместного движения жесткого недеформируемого подводного аппарата и гибкого кабеля. Проведена оценка пространственного положения системы под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок, обусловленных течением воды. Предложена математическая модель гидродинамического сопротивления подводного аппарата, находящегося под влиянием динамики кабеля при различных типах движения подводного аппарата: качка, волна, маневрирование.

Работы В.В. Костенко и др. 2009 и 2017–2018 гг. посвящены проблемам, связанным с гидродинамикой и поведением кабеля связи в различных режимах движения привязной системы «судно–подводный аппарат» с учетом течения воды [16–18].

В данной статье, вслед за Д.Р. Меркиным, впервые разработан численный алгоритм решения задачи Рауса–Аппеля [1–3, 7, 9] с учетом растяжимости [3, 7–9] и гидродинамических сил сопротивления воды [10, 19]. В качестве практической иллюстрации проведена оценка влияния подводного течения на форму кабеля в Норвежском море вблизи газового месторождения Ормен Ланге.

На сегодняшний день укладка кабеля на дно моря не теряет актуальности, с 2001 г. ежегодно прокла-

дывается не менее 20 000 км подводных волоконно-оптических кабельных систем [20]. Эти кабели предназначены для передачи данных между различными странами и материками. Многие страны занимаются укладкой кабеля на дно моря, например: Франция (Alcatel-Lucent, Orange Marine); Великобритания (Global Marine Systems, CTC Marine Projects Ltd., Subsea 7 S.A.); США (Tyco Electronics Subsea Communications LLC, Subsea Environmental Services Ltd.); Корея (KT Submarine, Kokusai Cable Ship Co.Ltd.); ОАЭ (E-Marine PJSC); Германия (Maersk Supply Service); Сингапур (ASEAN Cableship Pte Ltd.) [21].

■ Описание аналитической модели укладки кабеля на дно моря

Рассмотрим равномерное прямолинейное движение катушки со скоростью \underline{V} (см. рис. 1). С катушки сматывается кабель со скоростью, совпадающей со скоростью движения катушки, и укладывается под водой на неподвижную горизонтальную плоскость глубиной H . С течением времени кабель принимает некоторую установившуюся форму в системе координат, связанной с движущейся катушкой. Требуется определить форму и натяжение провисающей части кабеля [1–3, 7, 9].

Для математического описания кабеля будем использовать модель абсолютно гибкой растяжимой однородной нити. Уравнение движения нити вдоль установившейся линии кажущегося покоя при наличии внешних сил в естественных координатах имеет вид:

$$\frac{dT^*}{ds} + \underline{P} = 0, \frac{ds}{dl} = f(T). \quad (1)$$

Здесь T^* – кажущееся натяжение нити, \underline{P} – погонная равнодействующая сил, действующих на нить после растяжения, s – дуговая координата после растяжения, l – дуговая координата до растяжения, T – действительное натяжение нити, $f(T)$ – закон растяжимости нити. Применительно к рассматриваемой задаче в качестве погонной равнодействующей силы \underline{P} примем погонный вес нити в воде \underline{q} и погонную

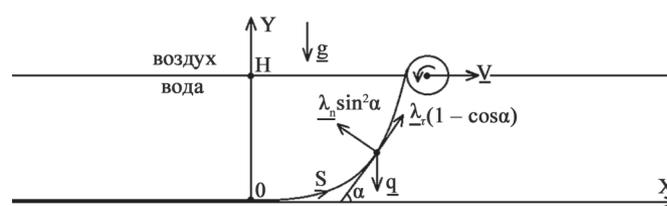


Рис. 1. Постановка задачи

гидродинамическую силу сопротивления воды λ относительно и переносному движениям нити. Рассмотрим плоское движение нити и запишем проекции первого уравнения системы (1) на касательную и главную нормаль:

$$\begin{aligned} \frac{dT^*}{ds} &= q \sin \alpha - \lambda_r (1 - \cos \alpha), \\ \frac{T^*}{\rho} &= q \cos \alpha - \lambda_n \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Дополним систему моделью гидродинамического сопротивления, представленной в работах [19, 10], где радиус кривизны ρ определяется следующими соотношениями:

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{dy}{d\alpha}. \quad (3)$$

Разделив первое уравнение на второе системы (2), с учетом уравнений связи (3) можно получить систему дифференциальных уравнений для определения кажущегося натяжения нити T^* , абсциссы x , ординаты y и дуговой координаты s :

$$\begin{aligned} \frac{dT^*}{d\alpha} &= \frac{q \sin \alpha - \lambda_r (1 - \cos \alpha)}{q \cos \alpha - \lambda_n \sin^2 \alpha} T^*, \\ \frac{ds}{d\alpha} &= \frac{1}{q \cos \alpha - \lambda_n \sin^2 \alpha} T^*, \\ \frac{dx}{d\alpha} &= \frac{\cos \alpha}{q \cos \alpha - \lambda_n \sin^2 \alpha} T^*, \\ \frac{dy}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha}{q \cos \alpha - \lambda_n \sin^2 \alpha} T^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Учтем влияние растяжимости нити согласно закону Гука только на погонный вес нити q , пренебрегая при этом изменением диаметра растянутой нити:

$$q = \frac{q_0}{f(T)} = \frac{q_0}{1 + \frac{T}{\sigma E}} = \frac{q_0}{1 + \frac{T^* + \mu V^2}{\sigma E}}, \quad (5)$$

где σ – площадь поперечного сечения нити, E – модуль упругости нити, μ – погонная масса нити. Подставляя выражение (5) в систему дифференциальных уравнений (4), нетрудно получить систему нелинейных дифференциальных уравнений, учитывая влияние растяжимости нити согласно закону Гука. Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (4) введём граничные условия:

$$x_{\alpha=0} = 0, y_{\alpha=0} = 0, y_{\alpha=\alpha_{\max}} = H, s_{\alpha=0} = 0. \quad (6)$$

С учетом граничных условий (6) необходимо совместно определить кажущееся натяжение T^* и ординаты y . После определения кажущегося натяжения T^* можно получить решение для абсциссы x и дуговой координаты S .

Угол α между касательной к нити τ и ординатой y изменяется в следующих пределах:

$$\alpha = [0; \alpha_{\max}], \quad (7)$$

где верхний предел α_{\max} определяется особенной точкой системы дифференциальных уравнений (4) с учетом влияния растяжимости нити согласно закону Гука (5).

■ Численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений

Для численного решения первого и третьего уравнений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) с учетом (5) применим явный метод Эйлера [25] и сформируем систему нелинейных алгебраических уравнений.

Отметим, что данная система состоит из взаимосвязанных $(N - 1)$ уравнений по кажущемуся натяжению T^* и $(N - 1)$ уравнений по ординате y . При этом, с учетом граничных условий, в данной системе содержится N неизвестных по кажущемуся натяжению T^* и $N - 2$ неизвестных по ординате y . Также отметим, что рассматривается равномерное разбиение угла α . Будем решать данную систему нелинейных алгебраических уравнений итерационным (по индексу k) методом Ньютона, который в общем случае имеет вид [25]:

$$\mathbf{J}^{(k)} \Delta \Phi^{(k)} = -\mathbf{F}^{(k)}, \quad \Phi^{(k+1)} = \Phi^{(k)} + \Delta \Phi^{(k)}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{J}^{(k)}$ – матрица Якоби, $\Delta \Phi^{(k)}$ – поправка к приближению для системы, $\mathbf{F}^{(k)}$ – невязка системы, $\Phi^{(k)}$ – приближение для системы. На каждой итерации метода Ньютона обновляются данные о верхнем пределе α_{\max} . Для простоты дальнейших записей индекс k опускается. Применительно к рассматриваемой задаче Φ , \mathbf{F} и \mathbf{J} имеют следующий вид:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{N \times 1}^* \\ \mathbf{y}_{(N-2) \times 1} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} {}^T F_i &= {}^T F_i(T_i^*, T_{i+1}^*, T_i^{*2}, T_i^* T_{i+1}^*), \\ {}^y F_i &= {}^y F_i(y_i, y_{i+1}, T_i^*, T_i^{*2}, y_i T_i^*, y_{i+1} T_i^*), \end{aligned} \quad (10)$$

где $i = [1; N - 1]$.

$$\mathbf{J}_{2(N-1) \times 2(N-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J1}_{(N-1) \times (N)} & \mathbf{J2}_{(N-1) \times (N-2)} \\ \mathbf{J3}_{(N-1) \times (N)} & \mathbf{J4}_{(N-1) \times (N-2)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{J1}_{(N-1) \times (N)} = \left[\frac{\partial ({}^r F_i)}{\partial T_j} \right], \quad \mathbf{J2}_{(N-1) \times (N-2)} = \left[\frac{\partial ({}^r F_i)}{\partial y_j} \right], \quad (12)$$

$$\mathbf{J3}_{(N-1) \times (N)} = \left[\frac{\partial ({}^y F_i)}{\partial T_j} \right], \quad \mathbf{J4}_{(N-1) \times (N-2)} = \left[\frac{\partial ({}^y F_i)}{\partial y_j} \right]. \quad (13)$$

Отметим, что матрица Якоби \mathbf{J} (формула 11) является блочной матрицей. Также отметим, что вычисление невязок ${}^y F_i$ и ${}^y F_{N-1}$ отличается от вычисления аналогичных невязок ${}^y F_i$ ввиду того, что ординаты y_i и y_N определяются из граничных условий (6), что, в свою очередь, влияет на соответствующие составляющие матрицы Якоби \mathbf{J} .

Для реализации итерационного метода Ньютона необходимо задаться начальным приближением, в качестве которого предлагается использовать численное решение системы линейных дифференциальных уравнений в случае нерастяжимой нити (в этом случае формула (5) редуцируется до выражения $q = q_0$), полученное прямым методом Гаусса [25] для идентичного количества разбиений явного метода Эйлера. Также отметим, что на каждой итерации метода Ньютона поправка к приближению $\Delta \Phi$ для системы (8) определяется прямым методом Гаусса.

По дискретному решению Φ для кажущегося натяжения \mathbf{T}^* и ординаты y можно определить абсциссу x и дуговую координату s , применив явный метод Эйлера ко второму и четвертому уравнениям системы (4) с учетом (5) и граничных условий (6). Финальным этапом решения поставленной задачи является переход от кажущегося натяжения \mathbf{T}^* к действительному натяжению \mathbf{T} :

$$T_i = T_i^* + \mu V^2, \quad i = [1; N]. \quad (14)$$

■ Описание параметров укладки кабеля на дно моря

Для реализации численного решения поставленной задачи необходимо задаться следующими величинами: параметрами кабеля (плотность $\gamma_{\text{каб}}$, модуль упругости E и диаметр d), гидродинамическими параметрами воды (плотность $\gamma_{\text{воды}}$ и динамическая вязкость η), эксплуатационными параметрами укладки (скорость укладки V и глубина укладки H).

В табл. 1 представлены различные параметры кабелей круглого сечения, рассмотренные в работах [10, 23–25]. Для определения погонного веса кабеля в воде воспользуемся соотношением:

$$q_0 = \tilde{\gamma}_{\text{каб}} \sigma g = (\gamma_{\text{каб}} - \gamma_{\text{воды}}) \sigma g, \quad (15)$$

где $\tilde{\gamma}_{\text{каб}}$ – плотность кабеля в воде, g – ускорение свободного падения, $\gamma_{\text{воды}}$ – плотность воды. Для определения погонных нормальной λ_n и касательной λ_τ гидродинамических сил сопротивления воды, действующих на кабель, воспользуемся следующим подходом [19, 10]:

$$\lambda_n = C_n \gamma_{\text{воды}} \frac{V^2}{2} d, \quad \lambda_\tau = C_\tau V. \quad (16)$$

Здесь C_n – коэффициент нормального гидродинамического сопротивления, C_τ – коэффициент касательного гидродинамического сопротивления, для определения которых будем использовать следующие соотношения [19, 10], предполагая, что для числа Рейнольдса Re соблюдается неравенство $30 < Re < 10^5$:

$$C_n = 1,1 + 4 Re^{-1/2}, \quad C_\tau = \pi \eta Nu, \\ Re = \frac{\gamma_{\text{воды}} V d}{\eta}, \quad (17) \\ Nu = 0,55 Re^{1/2} + 0,084 Re^{2/3}.$$

Здесь η – динамическая вязкость воды, Nu – число Нуссельта. В качестве плотности воды $\gamma_{\text{воды}}$ примем 1025 кг/м^3 в соответствии с работами [11–14, 24], а в качестве динамической вязкости воды η примем $0,0013 \text{ кг/м}\cdot\text{с}$ в соответствии с работой [19].

■ Сравнение моделей укладки кабеля на дно моря

Для моделирования процесса укладки кабеля на дно моря применяются различные методы решения. Эти методы имеют различную вычислительную сложность при их реализации. Рассматривается укладка

Таблица 1. Параметры кабелей

№, тип кабеля	Плотность $\gamma_{\text{каб}}$, кг/м ³	Модуль упругости E , Н/м ²	Диаметр d , м	Источник
1	1300	$7 \cdot 10^8$	0,041	[10]
2	3112,5	$9 \cdot 10^9$	0,047	[23]
3	5500	$2,55 \cdot 10^{10}$	0,1003	[24]
4	7850	$2,15 \cdot 10^{11}$	0,00599	[25]

нерастяжимого кабеля двумя подходами: аналитически [9] и численно. Также отдельно численным подходом рассматривается укладка растяжимого кабеля. В табл. 2 представлены ключевые этапы решения задачи для различных подходов и сравнительная оценка времени вычислений в зависимости от сложности модели.

Моделирование проводилось на 6-ядерном компьютере с процессором Intel i7 и 16 Гб RAM на примере результатов, представленных на рис. 3. Отметим, что основное влияние на производительность вычислителя оказывает количество точек интегрирования.

Также отметим, что в случае модели для растяжимого кабеля время моделирования определяется не только количеством точек интегрирования, но и количеством итераций метода Ньютона, т.е. настройками численной модели. При этом важно понимать, что настройки численной модели зависят от входных параметров укладки кабеля, так как модель растяжимого кабеля представлена системой нелинейных дифференциальных уравнений.

■ Результаты численного моделирования укладки кабеля на дно моря

Численная модель укладки растяжимого кабеля под водой реализована с применением программной среды Matlab Math Works [29]. В качестве исследуемых характеристик выберем форму провисающей

части кабеля и зависимость натяжения кабеля T от ординаты y . Результаты моделирования представлены в безразмерном виде для удобства использования результатов при анализе различных глубин укладки кабеля. Введенные на рис. 2–5 цвета линий соответствуют типам кабелей табл. 1.

Для корректного использования разработанной численной модели необходимо определиться с ее настройками, в частности – с величиной шага явного метода Эйлера и количеством итераций метода Ньютона.

На рис. 2, а, представлено влияние величины шага (угол приращения $d\alpha$) явного метода Эйлера на натяжение кабеля для типа кабеля № 3 (табл. 1) при скорости движения судна $V = 3$ узла (1,5432 м/с). На рис. 2, б, представлено влияние количества итераций метода Ньютона на натяжение кабеля для типа кабеля № 1 (табл. 1) при скорости движения судна $V = 3$ узла (1,5432 м/с) для угла приращения $d\alpha = 0,0108^\circ$ (соответствует количеству точек интегрирования $N = 1254$).

По результатам, представленным на рис. 2, можно заметить, что для данного класса задач присутствует сходимость численного подхода, т.е. существуют минимальные требования к настройке численной модели. Учитывая, что рассматриваемая система дифференциальных уравнений (4) с учетом (5) является нелинейной с неочевидной зависимостью от входных параметров, то для корректного использования

Таблица 2. Сопоставление методов численного решения

Этап	Аналитическое решение Меркина [9]	Численное решение для нерастяжимого кабеля	Численное решение для растяжимого кабеля	
Входные данные	$d, \gamma_{каб}, \gamma_{воды}, \eta, g, V, H$		$d, E, \gamma_{каб}, \gamma_{воды}, \eta, g, V, H$	
Настройки решателя		d, α	d, α, k	
Предварительная часть алгоритма		Определение $\alpha_{макс}$	Задание начального приближения α, y, T^*	
Основная часть алгоритма	Определение необходимой интегральной функции и константы интегрирования в соответствии с аналитическим решением	Решение системы линейных дифференциальных уравнений прямым методом Гаусса	Определение $\alpha_{макс}^{(k)}$	
	Определение x, y, T, s в соответствии с аналитическим решением		Подготовка $J^{(k)}, F^{(k)}$ Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений итерационным методом Ньютона	
Выходные данные		x, y, T, s		
Оценка времени моделирования	Около 60 с	Около 270 с	1 итерация	Около 460 с
			5 итераций	Около 1410 с
			27 итераций	Около 6370 с

разработанной модели укладки кабеля на дно моря необходимо определять зависимость решения от настроек для каждого конкретного случая.

Также необходимо убедиться в том, что результаты разработанной численной модели укладки растяжимого кабеля при параметрах, обеспечивающих нерастяжимость, совпадут с более простым известным решением для нерастяжимого кабеля [9].

На рис. 3 представлено сопоставление результатов разработанной численной модели укладки растяжимого кабеля, численного решения для нерастяжимого кабеля и аналитического решения Меркина [9]. Для этого рассмотрим модифицированный тип кабеля № 4 (табл. 1) со специально завышенным значением модуля упругости $E = 2,55 \cdot 10^{14}$ Н/м². На рис. 3

представлены исследуемые характеристики при скорости движения судна $V = 3$ узла (1,5432 м/с) для угла приращения $d\alpha = 0,0017^\circ$ (соответствует количеству точек интегрирования $N = 15499$) и 5 итераций метода Ньютона (только для численной модели укладки растяжимого кабеля).

Из анализа представленных на рис. 3 результатов можно заметить практически полное совпадение формы провисающей части кабеля (различие менее 1%) и зависимости натяжения кабеля T от ординаты y (различие менее 3%) для всех рассмотренных подходов. Высокое различие в натяжении кабеля T обусловлено граничными условиями (6). Данная проверка является необходимым условием корректности разработанной численной модели укладки растяжимого кабеля.

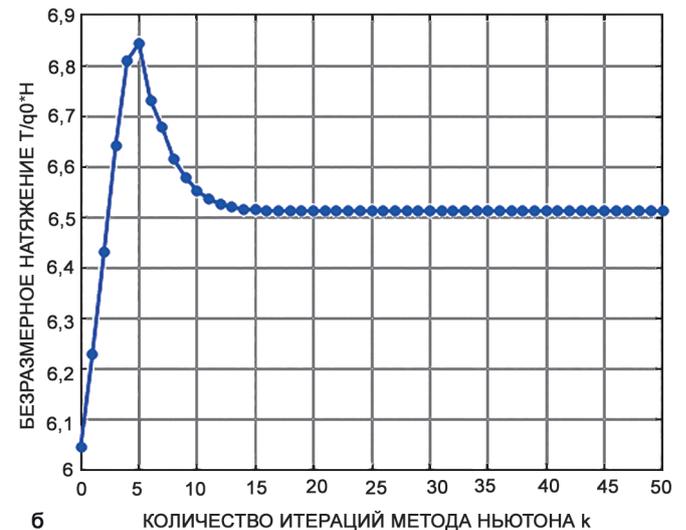
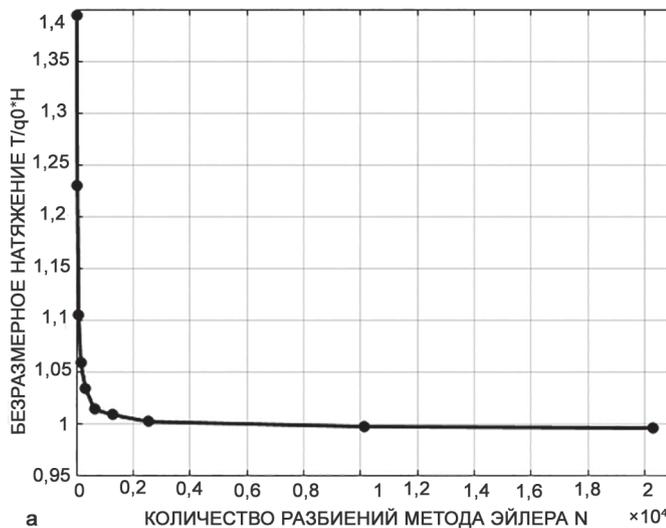


Рис. 2. Влияние настроек разработанной численной модели укладки кабеля на натяжение кабеля: влияние шага явного метода Эйлера – а; влияние количества итераций метода Ньютона – б

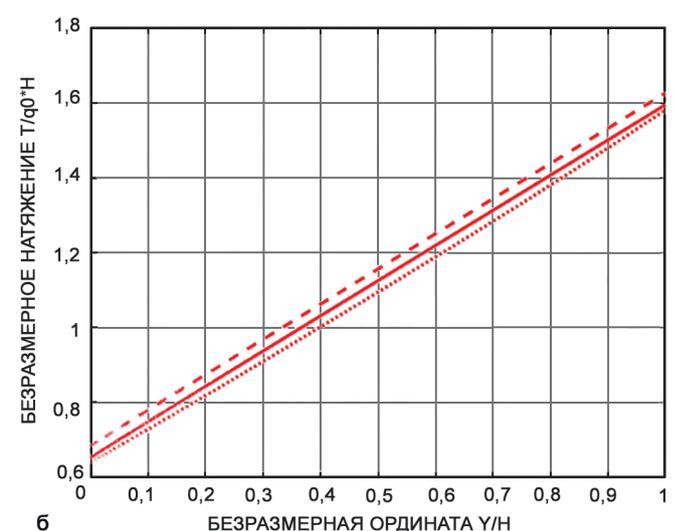
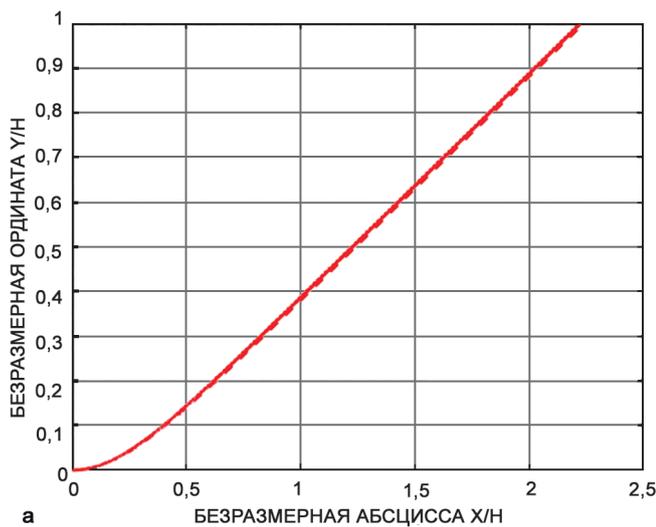


Рис. 3. Сопоставление различных подходов при параметрах, обеспечивающих нерастяжимость кабеля: а – форма кабеля; б – натяжение кабеля (на рисунке введены обозначения: сплошная линия – аналитическое решение Меркина; штриховая линия – численное решение для нерастяжимого кабеля; пунктирная – численное решение для растяжимого кабеля)

На рис. 4 представлено влияние параметров кабеля на исследуемые характеристики при скорости движения судна $V = 3$ узла (1,5432 м/с) для угла приращения $d\alpha = 0,0114^\circ$ и 27 итераций метода Ньютона. Рассмотрены 4 типа кабеля (табл. 1). Кроме того, на рис. 6 также представлено влияние скорости движения судна на исследуемые характеристики для типа кабеля № 2 (табл. 1) для угла приращения $d\alpha = 0,0102^\circ$ и 27 итераций метода Ньютона. Рассмотрены 3 величины скорости движения судна V : 1 узел (0,5144 м/с), 3 узла (1,5432 м/с), 5 узлов (2,572 м/с).

Из результатов, представленных на рис. 4, можно заметить очевидное влияние скорости движения судна на исследуемые характеристики: увеличение согласованной скорости движения судна приводит к увеличению гидродинамических сил сопротивления, действующих на провисающую часть кабеля, что, в свою очередь, приводит к увеличению длины провисающей части кабеля и, как следствие, к увеличению натяжения кабеля.

Увеличение всех рассматриваемых параметров кабеля (плотность, модуль упругости, диаметр), т.е. переход от кабеля типа № 1 к кабелю типа № 3, приводит к уменьшению провисающей части кабеля, что обусловлено большим приращением погонного веса кабеля по сравнению с погонной гидродинамической силой сопротивления. Также, анализируя результаты для кабеля типа № 4, можно заметить, что решение оказывается более чувствительным к диаметру кабеля по сравнению с другими параметрами кабеля (что обусловлено квадратичной зависимостью площади поперечного сечения от диаметра) и, как следствие, к большему изменению исследуемых характеристик.

Отметим, что полученная форма кабеля в настоящей работе отличается от формы цепной линии, так как хотя в обоих случаях рассматривается задача о равновесии, но в случае укладки кабеля поле сил дополняется гидродинамическим сопротивлением.

■ Влияние подводного течения на результаты численного моделирования укладки кабеля на дно моря

Проведение работ в реальных морских условиях сопровождается морским волнением и течением. Расширим разработанную численную модель укладки кабеля на дно моря учетом подводного течения с профилем, нелинейно зависящим от глубины. Для этого систему (2) потребуется расширить соответствующими слагаемыми:

$$\begin{aligned} \mp \tilde{\lambda}_r \cos \alpha &= \mp C_r u(y) \cos \alpha, \\ \mp \tilde{\lambda}_n \sin^2 \alpha &= \mp C_n \gamma_{воды} \frac{u^2(y)}{2} d \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (18)$$

где знак « \rightarrow » соответствует встречному течению, а « \leftarrow » – попутному. Отметим, что учет данной нелинейной зависимости требует изменения аналитической и численной моделей укладки кабеля, в частности, вышеописанные формулы (4) и (10) будут иметь другой вид.

В качестве практического примера рассмотрим влияние подводного течения на укладку кабеля вблизи газового месторождения Ормен Ланге, расположенного на территории Норвежского моря [27, 28]. Ориентируясь на характерный для данной местности

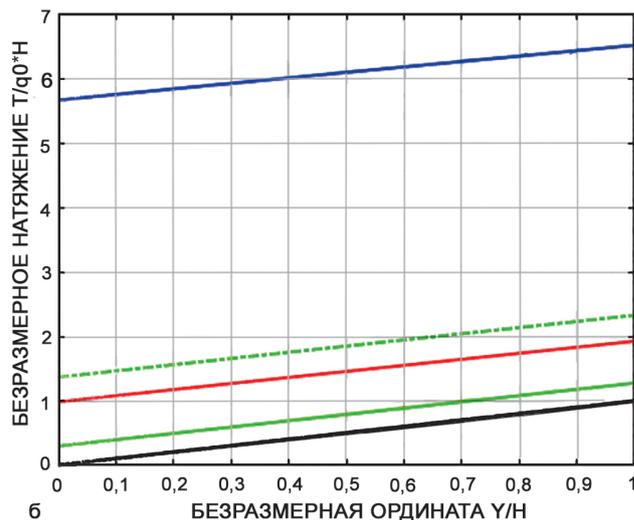
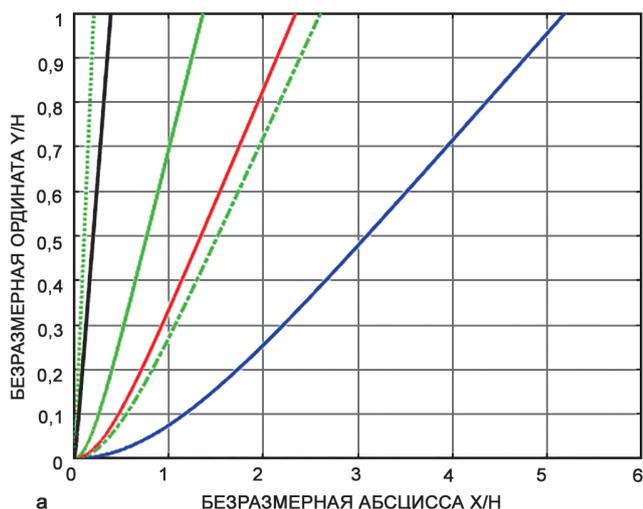


Рис. 4. Влияние параметров кабеля и скорости движения судна на исследуемые характеристики для численной модели укладки растяжимого кабеля:

а – форма кабеля; б – натяжение кабеля (на рисунке введены обозначения: сплошная линия – 3 узла; штрихпунктирная линия – 5 узлов; пунктирная – 1 узел)

профиль подводного течения [11], введем в рассмотрение нелинейную функциональную зависимость скорости подводного течения от глубины $u(y)$ в виде полинома третьей степени:

$$u(y) = \tilde{A}y^3 + \tilde{B}y^2 + \tilde{C}y + \tilde{D}, \quad (19)$$

где коэффициенты \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} и \tilde{D} определим из граничных условий:

$$u_{y=0} = 0, u'_{y=0} = 0, u_{y=H} = u_H, u'_{y=H} = 0. \quad (20)$$

В качестве скорости подводного течения на поверхности u_H зададимся максимальным значением (0,24 м/с) средней геофизической скорости в Норвежском море [27], пространственное распределение которой представлено на рис. 5, а. Таким образом, с учетом выражения (20), формула (19) приобретает вид:

$$u(y) = -\frac{2u_H}{H^3}y^3 + \frac{3u_H}{H^2}y^2. \quad (21)$$

Отметим, что компоненты $\tilde{\lambda}_\tau$ и $\tilde{\lambda}_n$ погонной гидродинамической силы сопротивления только при встречном течении суммируются с компонентами λ_τ и λ_n погонной гидродинамической силы сопротивления относительно и переносному движению при укладке кабеля. В этом случае длина провисающей части кабеля увеличится и, как следствие, увеличится натяжение кабеля.

На рис. 5, б, представлено влияние встречного подводного течения на форму кабеля для типа кабеля № 4 (табл. 1) при скорости движения судна $V = 3$ узла

(1,5432 м/с) для угла приращения $da = 0,0147^\circ$ (соответствует количеству точек интегрирования $N = 664$) и 200 итераций метода Ньютона.

По результатам, представленным на рис. 5, можно заметить небольшое влияние встречного подводного течения, что обусловлено небольшой величиной скорости подводного течения по сравнению со скоростью укладки кабеля.

Также отметим, что при скоростях подводного течения, соизмеримых со скоростью укладки кабеля, решение для нелинейной системы будет заметно отличаться от решения для линейной системы без учета растяжимости кабеля и подводного течения. В этом случае для обеспечения сходимости численного метода может возникнуть необходимость постепенного добавления нелинейности для получения промежуточных начальных приближений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача об укладке растяжимого кабеля на дно моря постоянной глубины с движущегося судна с учетом гидродинамических сил сопротивления воды. Представлен вывод дифференциальных уравнений установившегося движения кабеля, где в качестве модели кабеля используется математическая модель абсолютно гибкой однородной нити с учетом влияния растяжимости согласно закону Гука на погонный вес кабеля. Разработан численный метод решения задачи об укладке растяжимого кабеля с применением явного метода Эйлера и

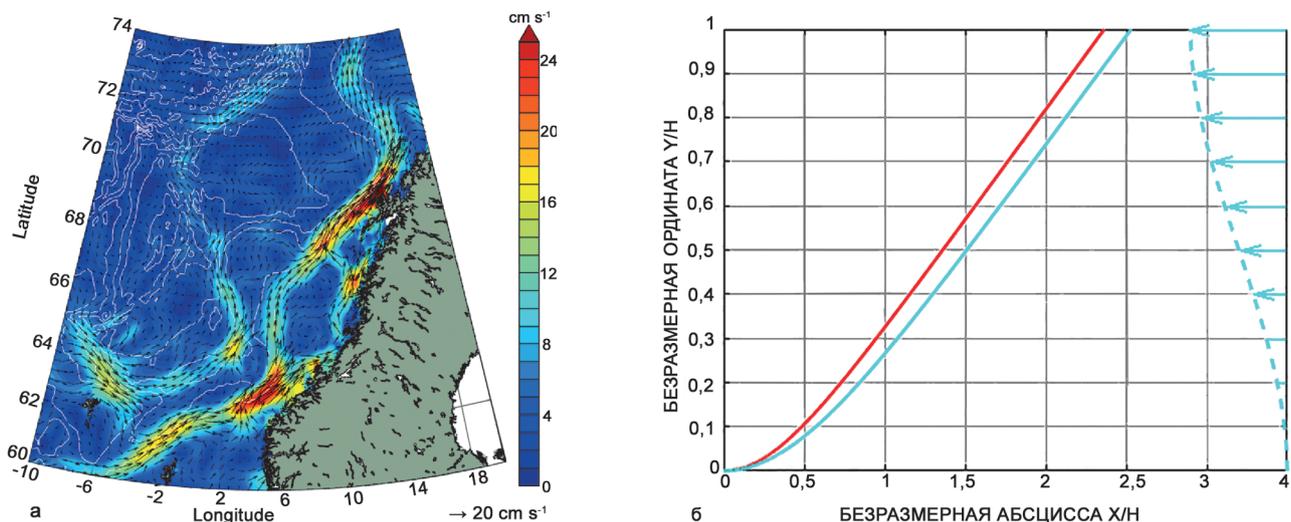


Рис. 5. Влияние подводного течения на форму кабеля вблизи газового месторождения Ормен Ланге: а – пространственное распределение средней геофизической скорости в Норвежском море [27]; б – форма кабеля при встречном подводном течении (на рисунке введены обозначения: штриховая синяя линия – профиль подводного течения; сплошная синяя линия – численное решение для растяжимого кабеля при встречном течении)

итерационного метода Ньютона. В качестве начального приближения для метода Ньютона используется численное решение для нерастяжимого кабеля, полученное прямым методом Гаусса. Для удобства анализа результатов численного моделирования укладки кабеля на дно моря форма и натяжение провисающей части кабеля представлены в безразмерном виде. Изучена сходимости численного метода решения задачи от величины шага явного метода Эйлера и количества итераций метода Ньютона.

Представленные результаты разработанной численной модели укладки растяжимого кабеля при параметрах, обеспечивающих нерастяжимость, хорошо совпадают с численным решением для нерастяжимого кабеля и аналитическим решением Мер-

кина [9]. Рассмотрено влияние скорости движения судна и параметров кабеля на исследуемые характеристики. Проведена оценка влияния подводного течения на форму кабеля в Норвежском море вблизи газового месторождения Ормен Ланге.

Результаты численного моделирования укладки кабеля под водой можно использовать для инженерной оценки прочности кабеля в рамках предложенной постановки задачи и принятых допущений. Отметим также, что приемы численного решения, представленные в статье в рамках аналитической и численной моделей укладки кабеля на дно моря, можно использовать при анализе схожих задач, например при буксировке или швартовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Routh E. An elementary treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. With numerous examples. London, 1860. 336 p.
2. Appel P. Traite de mecanique rationnelle. T. I. Paris, 1893. 549 p.
3. Минаков А.П. Основы механики нити. М., 1941. 88 с. Науч.-исслед. тр. Моск. текстильного ин-та; т. 9, вып. 1.
4. Матросов И.П. Теоретические основы для расчета движения судна с тралом // Рыбное хозяйство. 1961. № 6. С. 41–53.
5. Чубаров С.Н. О влиянии гидродинамических сил на ваер и выбор тросов для скоростного и глубоководного траления // Рыбное хозяйство. 1962. № 5. С. 45–49.
6. Крылов А.Н. О равновесии шаровой мины на течении. Санкт-Петербург, 1909. 27 с.
7. Алексеев Н.И. О натяжении и пространственной форме канатов в потоке воды // Тр. ВНИИ морского рыбного хозяйства и океанографии. 1966. Т. 61. С. 277–285.
8. Алексеев Н.И. Статика и установившееся движение гибкой нити. М.: Легкая индустрия, 1970. 270 с.
9. Меркин Д.П. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
10. Park J., Kim N. Dynamics of a semi-submersible autonomous underwater vehicle with a tow fish towed by a cable // Int. Journ. of Naval Archit. and Ocean Eng. 2015. Vol. 7, No. 2. P. 409–425.
11. Ren Z., Skjetne R. An on-site current profile estimation algorithm for a moored floating structure // Int. federation of automatic control. 2016. Vol. 49, No. 23. P. 153–158.
12. Ren Z., Skjetne, R. Kjerstad Ø.K. A tension-based position estimation approach for moored marine vessels // Int. federation of automatic control. 2015. Vol. 48, No. 16. P. 248–253.
13. Ren Z., Skjetne, R. A tension-based position estimation solution of a moored structure and its uncertain anchor positions // Int. federation of automatic control. 2016. Vol. 49, No. 23. P. 251–257.
14. Ren Z., Skjetne R., Hassani V. Supervisory control of line breakage for thruster-assisted position mooring system // Int. federation of automatic control. Vol. 48, No. 16. P. 235–240.
15. Vu M.T., Choi H.S., Kang J.I., Ji D.H., Jeong S.K. A study of hovering motion of the underwater vehicle with umbilical cable // Ocean Engineering. 2017. Vol. 135. P. 137–157.
16. Костенко В.В., Мокеева И.Г. Исследование влияния кабеля связи на маневренность телеуправляемого подводного аппарата // Подводные исследования и робототехника. 2009. № 1 (7). С. 22–27.
17. Костенко В.В., Львов О.Ю. Комбинированная система связи и навигации автономного подводного робота с поплавковым модулем // Подводные исследования и робототехника. 2017. № 1 (23). С. 31–43.
18. Ваулин Ю.В., Костенко В.В., Мокеева И.Г., Матвиенко Ю.В., Рылов Н.И. Особенности координирования донных источников навигационных сигналов с использованием буксируемого антенного модуля // Подводные исследования и робототехника. 2018. № 2 (26). С. 4–11.
19. Choc Y.I., Casarella M.J. Hydrodynamic resistance of towed cables // Journ. of Hydronautics. 1971. Vol. 5, No. 4. P. 126–131.
20. Пешков И.Б. Подводные кабели: современное состояние и тенденции развития: Обзор // Кабели и провода. 2013. № 5 (342). С. 9–15.
21. International Cable Protection Committee. – URL: <https://www.iscpc.org> (дата обращения: 15.01.2019).
22. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие. М.: Изд-во МАИ, 2000. 376 с.
23. Huang S. Dynamic analysis of three-dimensional marine cables // Ocean Engineering. 1994. Vol. 21, No. 6. P. 587–605.
24. Aamo O., Fossen T. Finite element modeling of moored vessels // Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems. 2001. Vol. 7, No. 1. P. 47–75.
25. Matulea I.C., Năstase A.T., Tălmăcia N., Slămnioiu G., Gonçalves-Coelho A.M. On the equilibrium configuration of mooring and towing cables // Applied Ocean Research. 2008 Vol. 30, No. 2. P. 81–91.
26. Потемкин В.Г. Введение в MATLAB. М.: Диалог-МИФИ, 2000.
27. Johannessen J.A., Pripp T., Eldevik T. GOCE studies of mean dynamic topography and ocean circulation in the Nordic Seas. – URL: https://www.researchgate.net/publication/258779193_GOCE_studies_of_mean_dynamic_topography_and_ocean_circulation_in_the_Nordic_Seas (дата обращения: 15.01.2019).
28. Мирзоев Д.А., Ибрагимов И.Э., Архипова О.Л. Освоение углеводородных ресурсов арктики инновационными подводными технологиями // Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений. 2012. № 3. С. 49–53.